

SÉRGIO LUIZ MEISTER BERLEZE

EFEITOS PELICULAR E DE PROXIMIDADE EM CONDUTORES NÃO-MAGNÉTICOS

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre.

CURITIBA
1988



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS

ATA DA DEFESA DA TESE DE MESTRADO DO ALUNO SÉRGIO LUIZ
MEISTER BERLEZE

Em sessão pública de defesa de tese iniciada às 10:00 horas, nesta data, após seminário sobre o assunto da tese e arguição pela banca, esta decidiu atribuir o conceito A.

Curitiba, 15 de março de 1988.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. René Robert - UFPR

Prof. Guilherme Fontes Leal Ferreira
Inst. Física e Química de São Carlos
USP

Prof. Máximo Siu Li
Inst. Física e Química de São Carlos
USP

Aos meus pais

Arildo Berleze

e

Clarice M. Berleze.

AGRADECIMENTOS

Desejo exprimir, com grande satisfação, os meus agradecimentos a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial agradeço:

Ao Professor Renê Robert, pela orientação sempre segura e dedicada que me proporcionou.

Aos Professores Cristiano J. F. Graf, Edson A. B. Stédile, Germano B. Afonso e Liu Kai, pela amizade, pelo incentivo constante e pelas críticas construtivas.

Aos Professores Patrício H. M. Rojas e Roberto Naliwaiko, do Laboratório Central de Eletrotécnica e Eletrônica (LAC) da Companhia Paranaense de Energia (COPEL), pela amizade, pelas sugestões e pelas informações.

Aos funcionários do Centro de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Paraná.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

A todos que, embora não relacionados aqui, sempre nos dirigiram palavras de estímulo e consideração.

SUMÁRIO

	<u>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</u>	vii
	<u>LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS</u>	ix
	<u>RESUMO</u>	xi
	<u>ABSTRACT</u>	xii
	<u>INTRODUÇÃO</u>	1
1	<u>REVISÃO DA LITERATURA</u>	3
1.1	DESCRIÇÃO QUALITATIVA DOS EFEITOS PELICULAR E DE PROXIMIDADE CLÁSSICOS	3
1.2	ASPECTOS HISTÓRICOS E MÉTODOS DESENVOLVIDOS ...	4
2	<u>DESENVOLVIMENTO TEÓRICO PARA UM ÚNICO CONDUTOR</u> ..	8
2.1	ESTABELECIMENTO DA EQUAÇÃO INTEGRAL	9
2.2	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL	14
2.3	SOLUÇÃO E CÁLCULO DAS DENSIDADES DE CORRENTE ..	20
2.4	CÁLCULO DA IMPEDÂNCIA UNITÁRIA	20
3	<u>EXTENSÃO PARA CASOS DE DOIS CONDUTORES</u>	23
3.1	ESTABELECIMENTO DA EQUAÇÃO INTEGRAL	24
3.2	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL	27
3.3	SOLUÇÃO E CÁLCULO DAS DENSIDADES DE CORRENTE ..	37
3.4	CÁLCULO DAS IMPEDÂNCIAS UNITÁRIAS	38
4	<u>GENERALIZAÇÃO PARA CASOS DE VÁRIOS CONDUTORES</u> ...	41
4.1	ESTABELECIMENTO DA EQUAÇÃO INTEGRAL	42
4.2	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL	43

4.3	SOLUÇÃO E CÁLCULO DAS DENSIDADES DE CORRENTE ..	46
4.4	CÁLCULO DAS IMPEDÂNCIAS UNITÁRIAS	47
5	<u>DISCUSSÃO DE RESULTADOS</u>	51
	<u>CONCLUSÕES</u>	67
	<u>SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</u>	69
	<u>APÊNDICE A: DEFINIÇÃO DE ALGUMAS OPERAÇÕES</u> <u>MATRICIAIS</u>	71
	<u>APÊNDICE B: EXPRESSÃO PARA O CÁLCULO DA DISTÂN-</u> <u>CIA GEOMÉTRICA MÉDIA ENTRE UMA ÁREA</u> <u>RETANGULAR E UM PONTO</u>	74
	<u>APÊNDICE C: EXPRESSÃO PARA O CÁLCULO DA DISTÂN-</u> <u>CIA GEOMÉTRICA MÉDIA ENTRE DUAS</u> <u>ÁREAS RETANGULARES</u>	78
	<u>APÊNDICE D: BREVE DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS UTI-</u> <u>LIZADOS</u>	86
	<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	89

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

DESENVOLVIMENTO TEÓRICO PARA UM ÚNICO CONDUTOR	
2.1	Disposição geométrica 8
2.2	Subdivisão da secção transversal 15
2.3	Trecho unitário do condutor 21
2.4	Circuito equivalente para o condutor 22
EXTENSÃO PARA CASOS DE DOIS CONDUTORES	
3.1	Disposição geométrica 23
3.2	Subdivisão das secções transversais 27
3.3	Trechos unitários dos condutores 38
3.4	Circuitos equivalentes para os condutores 40
GENERALIZAÇÃO PARA CASOS DE VÁRIOS CONDUTORES	
4.1	Disposição geométrica 41
4.2	Subdivisão das secções transversais 43
4.3	Trechos unitários dos condutores 48
4.4	Circuito equivalente para o r-ésimo condutor 50
DISCUSSÃO DE RESULTADOS	
5.1	Comparação de resultados para fitas de cobre 53
5.2	Perfis de densidades de corrente em fitas 54
5.3	Variação em R_{ca}/R_{cc} em função da frequência para fitas 55

5.4	Comparação de resultados em condutor quadrado ...	56
5.5	Representação pictorial para secção quadrada	57
5.6	Secção transversal quadrada vazada	58
5.7	Comparação de resultados de R_{ca}/R_{cc} para secção quadrada vazada	58
5.8	Secção transversal de cantoneira	59
5.9	Representação pictorial para cantoneira	60
5.10	Comparação entre resultados de R_{ca}/R_{cc}	61
5.11	Secção transversal e disposição de dois condutores	62
5.12	Representação pictorial para o caso de dois condutores próximos	63
5.13	Comparação de valores de X_{int}	64
5.14	Convergência da solução aproximada	65

EXPRESSÃO PARA O CÁLCULO DA DISTÂNCIA GEOMÉTRICA MÉDIA ENTRE UMA ÁREA RETANGULAR E UM PONTO

B.1	Situação geométrica do problema	74
B.2	Definição das variáveis polares	75

EXPRESSÃO PARA O CÁLCULO DA DISTÂNCIA GEOMÉTRICA MÉDIA ENTRE DUAS ÁREAS RETANGULARES

C.1	Situação geométrica do problema	78
C.2	Definição das variáveis polares	81
C.3	Comparação de tempos de cálculo	85

BREVE DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS UTILIZADOS

D.1	Hierarquia de utilização dos programas	86
-----	--	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

\tilde{a}	- Auto-valor da equação integral
\vec{A}	- Potencial vetor magnético
\vec{B}	- Indução magnética
C	- Constante de normalização
\vec{D}	- Deslocamento elétrico
DGM	- Distância Geométrica Média
\vec{E}	- Campo elétrico total
\vec{E}_o	- Campo elétrico aplicado
f	- Frequência dos campos elétrico e magnético
G_o	- Distância geométrica média entre uma secção transversal e a origem
G_{ik}	- Distância geométrica média entre domínios parciais
G_{io}	- Distância geométrica média entre um domínio parcial e a origem
\vec{H}	- Intensidade de campo magnético
$[I]$	- Matriz identidade
I_T	- Corrente total
j	- Unidade imaginária
\vec{J}	- Densidade de corrente
M	- Número de condutores
N	- Número de domínios parciais
p	- Parâmetro de frequência
R_{ca}	- Resistência unitária em corrente alternada

R_{cc}	- Resistência unitária em corrente contínua
S	- Superfície de integração
S_d	- Área de cada domínio parcial
t	- Tempo
$[U]$	- Matriz unidade
V	- Potencial escalar
V	- Voltagem devido a \vec{E}_0
\vec{x}, \vec{x}'	- Vetor de posição
X	- Reatância unitária
Z	- Impedância unitária complexa
ϵ	- Permissividade elétrica
ϕ	- Fase da corrente total
μ	- Permeabilidade magnética
ω	- Frequência angular dos campos elétrico e magnético
ρ	- Densidade de cargas livres
σ	- Condutividade elétrica

RESUMO

Consideram-se os efeitos pelicular e de proximidade em condutores cilíndricos de secção transversal qualquer, não-magnéticos e em regime quase-estacionário. Usa-se o formalismo da equação integral. Desenvolvem-se expressões para o cálculo da distribuição de corrente através da secção transversal. Desenvolve-se um método para o cálculo da matriz de impedâncias do sistema a partir das densidades de corrente. Generalizam-se as expressões para casos de diversos condutores paralelos interagindo entre si. Discretizam-se tais expressões, adequando-as ao cálculo numérico, o que permite o tratamento de condutores de secção transversal qualquer. Mostram-se alguns resultados e comparações com valores experimentais.

ABSTRACT

The skin and proximity effects in cylindrical and nonmagnetic conductors are considered. The conductors are assumed to be of arbitrary cross-sectional shape and in steady state. The integral equation formalism is used. Formulas for calculations of current distribution within the cross-section are presented. A method for calculation of the impedance matrix of the system based on current densities is developed. Expressions are then generalized for situations of several parallel interacting conductors. The problem is solved by means of numerical techniques, which allows to study a wide variety of conductor shapes. Some typical results are shown and comparisons with experimental data are made.

INTRODUÇÃO

Considera-se o caso de efeitos pelicular e de proximidade clássicos, na classificação de Casimir.⁷ Utiliza-se o formalismo baseado na equação integral do fenômeno.

No Capítulo 1, fazemos uma revisão da literatura, apresentando uma descrição conceitual do fenômeno e comentando a evolução dos estudos referentes aos efeitos pelicular e de proximidade.

No Capítulo 2, fazemos o estudo completo para um único condutor. Deduzimos as expressões para o cálculo da distribuição de corrente através da secção transversal do condutor. Desenvolvemos um método para a determinação da impedância unitária do condutor, a partir da distribuição de corrente.

No Capítulo 3, fazemos uma extensão das expressões do Capítulo 2, abordando casos de dois condutores colocados geometricamente em paralelo e interagindo entre si. A distribuição de corrente é calculada de forma análoga ao caso de um condutor. Desenvolvemos expressões para o cálculo da matriz de impedâncias, a qual fornece informações sobre a impedância própria dos condutores, bem como do acoplamento eletromagnético entre os mesmos.

No Capítulo 4, propomos uma generalização das expressões do Capítulo 3 para casos de vários condutores interagindo entre si.

No Capítulo 5, apresentamos resultados numéricos obtidos para algumas configurações de condutores. Fazemos também comparações entre resultados produzidos pelas expressões aproximadas aqui desenvolvidas e valores obtidos experimentalmente.

Relacionamos também alguns pontos que poderão originar estudos posteriores. Justificam-se tais sugestões com base nas observações feitas durante o desenvolvimento deste trabalho.

No Apêndice A, definimos algumas operações matriciais especiais que são usadas nos Apêndices B e C.

Nos Apêndices B e C, desenvolvemos um método matricial para o cálculo das distâncias geométricas médias de um retângulo a um ponto e entre dois retângulos. O método matricial mostrou-se útil e rápido quando do desenvolvimento de algoritmos computacionais para solução numérica do problema.

No Apêndice D, fazemos um breve comentário sobre os programas computacionais desenvolvidos e utilizados neste trabalho. Todos os programas foram desenvolvidos paralelamente à elaboração deste trabalho. Suas listagens não foram inseridas tendo em vista o elevado número de páginas que seriam necessárias. •

CAPÍTULO 1

REVISÃO DA LITERATURA

1.1 DESCRIÇÃO QUALITATIVA DOS EFEITOS PELICULAR E DE PROXIMIDADE CLÁSSICOS

Quando em um condutor flui uma corrente variável no tempo, esta distribui-se de forma não-uniforme sobre a secção transversal do condutor. O campo magnético, criado por esta corrente fluindo no condutor, induz correntes de Foucault, as quais se superpõem à primeira, provocando uma redistribuição nas densidades de corrente, com maior concentração na região próxima à superfície. Este fenômeno é chamado de efeito pelicular.

Quando dois ou mais condutores estão próximos, as correntes de Foucault induzidas em um dos condutores terão como origem, além da variação do campo magnético do próprio condutor, a variação do campo magnético gerado pelos condutores vizinhos. Ocorre, da mesma forma que no efeito pelicular, uma redistribuição nas densidades de corrente. Este fenômeno é chamado de efeito de proximidade.

Os efeitos pelicular e de proximidade são efeitos eletrodinâmicos.

Soluções analíticas exatas só foram obtidas para o efeito pelicular em duas situações: condutores de simetria circular e chapas infinitamente largas. Em casos práticos interessa a

solução do problema para condutores de secção transversal qualquer. Nestes casos, mesmo que se consiga estabelecer as condições de contorno sob forma clássica, de Dirichlet ou de Neumann, a solução exata seria de difícil avaliação, em vista do complexo sistema de equações a ser resolvido. Restam então as técnicas numéricas para aproximação da solução.

Devido à distribuição não-uniforme das densidades de corrente, o cálculo da impedância do condutor é dependente do conhecimento desta distribuição. O valor da resistência efetiva do condutor é superior ao valor da resistência em corrente contínua.

O estudo dos efeitos pelicular e de proximidade, tem importância relevante em situações tais como: em condutores percorridos por correntes de alta intensidade e baixa frequência; em condutores percorridos por correntes de baixa intensidade e alta frequência; em ensaios elétricos, na consideração do estado transitório devido a impulsos de corrente;³⁹ na temperatura superficial de materiais (p.360);²³ no cálculo das bobinas para magnetossoldagem e magnetomoldagem.¹⁵

1.2 ASPECTOS HISTÓRICOS E MÉTODOS DESENVOLVIDOS

Os primeiros estudos sobre os efeitos pelicular e de proximidade devem-se, principalmente, a Maxwell, Heaviside e Rayleigh. Segundo Higgins, em 1864 Maxwell mostrou que a impedância de um circuito em regime quase-estacionário diferia daquela em regime transitório; justificou esta diferença como sendo devido à distribuição não-uniforme da corrente através da secção transversal do condutor.¹⁶ Neste trabalho, Maxwell apre-

sentou a primeira solução analítica para o efeito pelicular, a qual se aplicava a condutores cilíndricos isolados.

Por volta de 1884, Heaviside desenvolveu pesquisas empregando solenóides. Mostrou que com a variação da frequência do campo elétrico aplicado, a impedância do circuito modificava-se. Estes trabalhos de Heaviside só ganharam maior atenção a partir de 1886. Foi também neste ano que Heaviside publicou um trabalho no qual, pela primeira vez, é tratado de forma específica o efeito de proximidade.

Rayleigh, em 1886, publicou trabalhos apresentando uma solução mais refinada para o problema do efeito pelicular proposto por Maxwell. Nestes trabalhos obteve expressões explícitas para a razão entre a resistência efetiva do condutor em corrente alternada e a resistência em corrente contínua, bem como para a indutância em função da frequência.

Estes trabalhos mostraram a importância prática dos efeitos pelicular e de proximidade em sistemas eletromagnéticos.

Em 1912, Rosa e Grover, pesquisadores do National Bureau of Standard, elaboraram tabelas para o cálculo aproximado do efeito pelicular.³⁰

A partir de então, surgiram diversos métodos para solução aproximada do problema. Pode-se fazer uma sinopse dos métodos numéricos desenvolvidos, classificando-os em três grandes grupos.

O primeiro grupo tem por base o estabelecimento e a solução do problema sob forma diferencial. Por volta de 1916, Press apresentou uma solução, usando séries de Fourier, para o caso de condutores com secção transversal retangular.²⁹

Dwight, em 1918, desenvolveu um método de expansão da frequência em série de potências.¹⁰ Em 1938, Arnold introduziu melhoramentos no método desenvolvido por Dwight, de forma a levar em consideração, simultaneamente, os efeitos pelicular e de proximidade.¹ Estes métodos exigem hipóteses de condições de contorno. Para minimizar o problema da formulação de hipóteses de condições de contorno, Daley, em 1939, desenvolveu um método misto teórico-experimental, no qual as condições de contorno seriam previamente medidas.⁹ Este método não teve grande aceitação devido às dificuldades experimentais. Em 1940, Gross apresentou uma generalização do método de Dwight para condutores retangulares.¹⁴ Este método não teve aceitação devido à sua lenta convergência.

O segundo grupo tem por base o estabelecimento e a solução do problema sob forma integral. Manneback desenvolveu, em 1922, uma equação integral englobando os efeitos pelicular e de proximidade.²¹ Por volta de 1927, Schwenkhagen resolveu a equação proposta por Manneback usando a técnica numérica de diferenças finitas, enquanto que em 1962, Belevitch resolveu a referida equação pelo método de aproximações sucessivas.^{32,3} Entre 1965 e 1969, o método de Schwenkhagen sofreu melhoramentos em trabalhos de Graneau e de Schaffer.^{13,31} É neste grupo que se enquadra a solução desenvolvida neste trabalho. Usou-se a técnica das diferenças finitas, introduzindo-se otimizações no processo de cálculo.

O terceiro grupo tem por base a solução da equação de auto-valor originada na equação de difusão. Em 1966, Silvester desenvolveu inicialmente o método para condutores de secção transversal retangular, generalizando, a partir de 1968, para

condutores de secções arbitrárias e para diversos condutores interagindo entre si.^{34,35,36,37} Este método também é conhecido como teoria modal.

Estudos pormenorizados para situações de frequências superiores às de microondas e para materiais supercondutores foram feitos inicialmente por London e Pippard a partir de 1935.^{19,27}

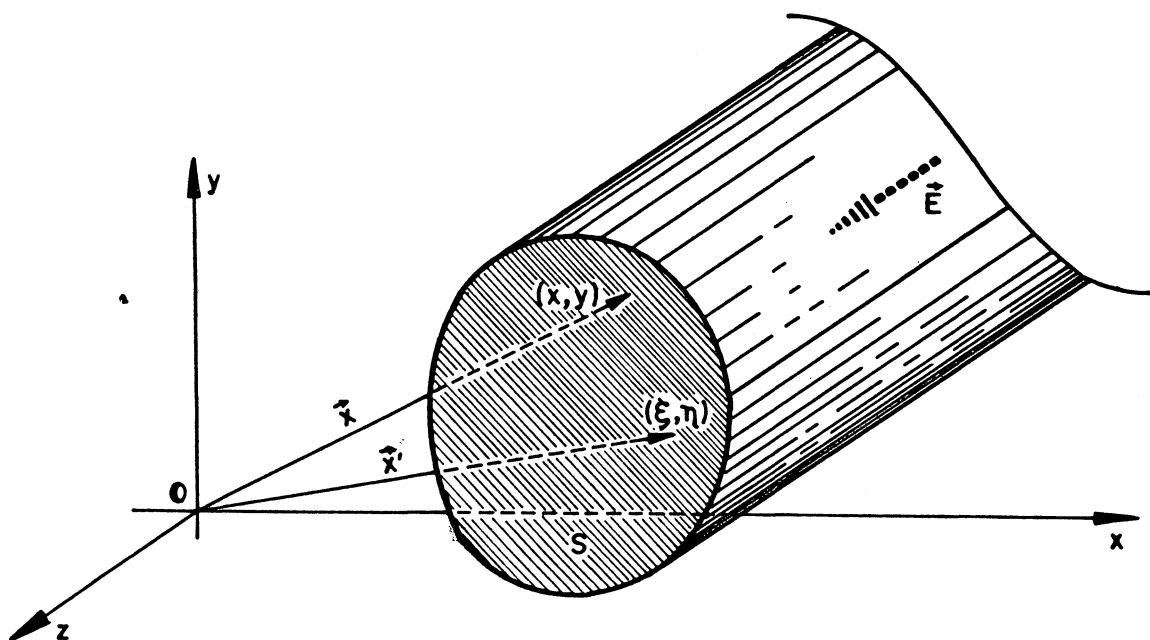
O estudo dos efeitos pelicular e de proximidade tem prosseguido, dentro de cada grupo enumerado anteriormente. Têm-se desenvolvido métodos analíticos e numéricos aproximados, cada qual visando uma solução mais rápida e mais precisa para situações geométricas com simetrias particulares. A consideração de tais efeitos se faz necessária, principalmente, devido ao aumento da potência dos sistemas elétricos, bem como do desenvolvimento de materiais dielétricos com maior rigidez dielétrica, os quais possibilitam um menor afastamento entre os condutores. Assim, têm-se como exemplos, os métodos apresentados por Iselborn em 1984 e por Zervas em 1987.^{17,40} Outro aspecto que tem motivado a consideração do efeito pelicular é a necessidade de se analisar o comportamento de sistemas elétricos em regime transitório, conforme mostrado por Wiak.³⁹

CAPÍTULO 2
DESENVOLVIMENTO TEÓRICO PARA UM
ÚNICO CONDUTOR

Para esta dedução, consideramos um condutor cilíndrico, de secção transversal qualquer e de comprimento infinito, cujo eixo é paralelo ao eixo Oz , conforme a fig. 2.1.

Para as grandezas, usamos o Sistema Internacional de unidades.

FIGURA 2.1 - DISPOSIÇÃO GEOMÉTRICA



2.1 ESTABELECIMENTO DA EQUAÇÃO INTEGRAL

Partimos das seguintes hipóteses:

- a) considera-se o condutor isolado, ou seja, outros condutores, inclusive o de retorno, estão suficientemente afastados, tal que seus efeitos podem ser desprezados;
- b) os condutores e dielétricos são considerados isótropos, homogêneos e lineares;
- c) os circuitos são considerados rígidos e fixos em relação ao observador;
- d) os campos e correntes têm variação harmônica no tempo;
- e) na dedução, é usado o gauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$;
- f) pelo fato do condutor ter comprimento infinito, podem ser desprezados os efeitos de extremidade;
- g) trata-se de regime quase-estacionário;
- h) a temperatura é suposta constante e igual em todos os pontos do condutor.

Na fig. 2.1, o vetor $\vec{E}(\vec{x}, t)$ representa o campo elétrico no interior do condutor, o vetor \vec{x} posiciona o ponto de observação e o vetor \vec{x}' varre o domínio de integração S .

Consideramos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, com versores \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} dos eixos x , y e z , respectivamente, no qual os vetores \vec{x} e \vec{x}' são representados genericamente por

$$\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad , \quad (2.1.1)$$

$$\vec{x}' = \xi\hat{i} + \eta\hat{j} + z'\hat{k} \quad . \quad (2.1.2)$$

Adotamos também a seguinte notação para as grandezas eletromagnéticas: \vec{E} para o vetor campo elétrico; \vec{D} para o vetor deslocamento elétrico; \vec{J} para o vetor densidade de corrente; \vec{B} para o vetor indução magnética; \vec{H} para o vetor intensidade de campo magnético e \vec{A} para o potencial vetor magnético. Todas estas grandezas são, em geral, funções das coordenadas espaciais (\vec{x}) e do tempo (t).

Tratamos de materiais lineares, com permissividade elétrica ϵ , permeabilidade magnética μ e condutividade elétrica σ .

Para obter a equação integral, consideramos as equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}, t) = \vec{J}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad , \quad (2.1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad , \quad (2.1.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0 \quad , \quad (2.1.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}, t) = \rho \quad , \quad (2.1.6)$$

sendo que na equação (2.1.6), ρ representa a densidade de cargas livres.

Usamos também as relações constitutivas:

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{x}, t) \quad , \quad (2.1.7)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \mu \vec{H}(\vec{x}, t) \quad , \quad (2.1.8)$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{x}, t) \quad . \quad (2.1.9)$$

Consideramos, ainda, que

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t) \quad . \quad (2.1.10)$$

Escrevemos a equação (2.1.4) em função do potencial vetor magnético, obtendo-se

$$\vec{\nabla} \times \left\{ \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right\} = \vec{0} \quad . \quad (2.1.11)$$

Então, o termo entre chaves de (2.1.11) deve ser o gradiente de uma função escalar $V(\vec{x}, t)$ com sinal negativo, na qual o sinal negativo é usado por convenção.

$$\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} = - \vec{\nabla} V(\vec{x}, t) \quad , \quad (2.1.12)$$

Resulta assim

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla} V(\vec{x}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad , \quad (2.1.13)$$

pela substituição de (2.1.13) em (2.1.9), obtém-se

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = -\sigma \vec{\nabla} V(\vec{x}, t) - \sigma \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad . \quad (2.1.14)$$

Fazemos a consideração (p.299)³⁸ de que

$$-\vec{\nabla} V(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\vec{x}, t) \quad , \quad (2.1.15)$$

resultando

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sigma \vec{E}_0(\vec{x}, t) - \sigma \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad . \quad (2.1.16)$$

Na expressão (2.1.16), vê-se que a densidade de corrente em pontos interiores ao condutor é formada por duas partes: a primeira parcela representa a contribuição do campo elétrico aplicado (contribuição irrotacional) e a segunda parcela representa a contribuição dinâmica do campo elétrico induzido (contribuição rotacional).

O campo elétrico aplicado é dado sob a forma

$$\vec{E}_0(\vec{x}, t) = E_0 e^{j\omega t} \hat{k} \quad , \quad (2.1.17)$$

onde

$$j = \sqrt{-1} \quad (2.1.18)$$

e ω é a frequência angular do referido campo.

Na equação (2.1.17), fazemos a hipótese de que E_0 independe de x e de y no interior do condutor.

Os vetores densidade de corrente e potencial vetor magnético têm apenas componentes na direção z , tendo em vista a simetria cilíndrica do condutor e o posicionamento do sistema de coordenadas, conforme a fig. 2.1. Eles são dados por

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = J_z(\vec{x}, t) \hat{k} = J_s(\vec{x}) e^{j\omega t} \hat{k}, \quad (2.1.19)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = A_z(\vec{x}, t) \hat{k} = A_s(\vec{x}) e^{j\omega t} \hat{k}, \quad (2.1.20)$$

nas quais o sub-índice s denota a parte dependente da posição, na componente z do vetor. O fato de não se usar sub-índice de componente ao lado do sub-índice s visa simplificar a notação para as expressões que se seguem, além de evitar redundância, pois sabe-se que tais vetores só têm componente z .

Até a expressão (2.1.16), o desenvolvimento se fez de forma generalizada, não sendo usadas aproximações. Deste ponto em diante, introduzimos a aproximação relacionada com o estado quase-estacionário.

A expressão do potencial vetor magnético, devido a um condutor retilíneo infinito, em regime estacionário, é a seguinte (p.219):³⁸

$$A(x, y) = - \frac{\mu}{2\pi} \int_S J(\xi, \eta) \ln \left\{ \frac{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}}{[\xi^2 + \eta^2]^{1/2}} \right\} d\xi d\eta + A(0) \quad (2.1.21)$$

onde $A(0)$ é uma constante aditiva.

Substituímos (2.1.17) a (2.1.21) em (2.1.16), obtendo-se

$$\begin{aligned} J_s(x, y) e^{j\omega t} &= \sigma E_0 e^{j\omega t} - \\ &- \sigma \frac{\partial}{\partial t} \left\{ A_s(0) e^{j\omega t} - \frac{\mu}{2\pi} \int_S J(\xi, \eta) e^{j\omega t} \ln \left\{ \frac{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}}{[\xi^2 + \eta^2]^{1/2}} \right\} d\xi d\eta \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

De forma equivalente, tem-se

$$J_s(x,y) = \sigma E_o - j\omega\sigma A_s(0) - \\ - \tilde{a} \int_S J_s(\xi,\eta) \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\ + \tilde{a} \int_S J_s(\xi,\eta) \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta, \quad (2.1.23)$$

na qual definimos o parâmetro

$$\tilde{a} = j \frac{\omega\sigma\mu}{2\pi}, \quad (2.1.24)$$

que representa o auto-valor da equação integral.

Como condição complementar para a solução de (2.1.23), impomos a condição (p.126)²¹

$$\int_S J_s(x,y) dx dy = I_T, \quad (2.1.25)$$

onde I_T representa a corrente total no condutor, que é um número complexo. O símbolo I_T não engloba o fator temporal $e^{j\omega t}$.

Definimos, ainda, a constante de normalização

$$C = \sigma E_o - j\omega\sigma A_s(0), \quad (2.1.26)$$

e obtivemos (2.1.23) e (2.1.25) na forma alternativa

$$J'_s(x,y) = 1 - \tilde{a} \int_S J'_s(\xi,\eta) \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\ + \tilde{a} \int_S J'_s(\xi,\eta) \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta, \quad (2.1.27)$$

$$C \int_S J'_s(x,y) dx dy = I_T, \quad (2.1.28)$$

respectivamente.

Em (2.1.27) e (2.1.28), J'_s representa a densidade de corrente relativa, que é dada por

$$J'_s = \frac{J_s}{C} \quad . \quad (2.1.29)$$

A equação (2.1.23) ou (2.1.27) é classificada como sendo uma equação integral de Fredholm de segunda espécie, não-homogênea, com núcleo assimétrico na teoria de Schmidt-Hilbert e com auto-valor $\tilde{\alpha}$.²²

Na equação (2.1.23), σE_0 representa uma parcela irrotacional, enquanto que as demais parcelas do segundo membro representam parcelas rotacionais.

Alguns trabalhos, como Schaffer e Iselborn, incorporam a primeira integral do segundo membro de (2.1.23) ou (2.1.27) à constante C, tendo em vista que apenas a última integral do segundo membro das referidas equações depende de (x,y).^{31,17} Neste trabalho, assim como em Beccari, mantêm-se as parcelas escritas de forma não combinada, por ser mais conveniente para o cálculo da impedância pelo método que será descrito na Seção 2.4.²

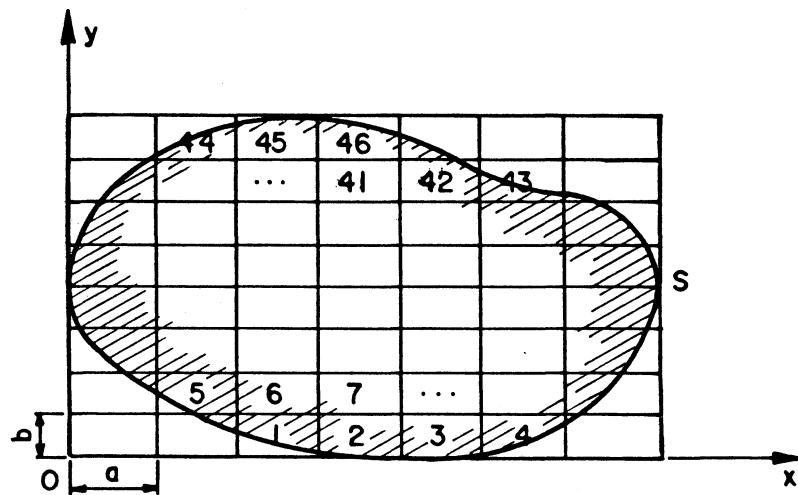
2.2 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL

Para estabelecer as equações discretizadas, parte-se das equações (2.1.27) e (2.1.28), nas quais o domínio de integração S é contínuo.

Inscribe-se, então, da melhor maneira possível, o domínio de integração S num retângulo. Este retângulo, por sua vez, é subdividido em N domínios parciais retangulares, de lados a e b, por um sistema de retas paralelas aos lados do retângulo

circunscrito ao domínio S , conforme a fig. 2.2.

FIGURA 2.2 - SUBDIVISÃO DA SECÇÃO TRANSVERSAL



Neste trabalho, consideramos que os N domínios parciais possuem áreas iguais, por razões de simplificação de cálculo.

O fato de escolher-se domínios parciais retangulares ao invés de quadrados, embora não permita as simplificações no cálculo numérico propostas por Silvester, possibilita um tratamento mais fiel de casos de secções transversais mais gerais.

Fazemos a hipótese de que a densidade de corrente $J_s(\xi, \eta)$ é constante dentro de cada domínio parcial. Esta aproximação é tanto melhor quanto maior for o número N de domínios parciais.

Indexamos os domínios parciais por i , com $i = 1, 2, \dots, N$, de forma que a integral sobre o domínio S pode ser substituída pela soma das integrais sobre os domínios parciais S_i , tal que a equação (2.1.27) torna-se:

$$J'_S(x,y) = 1 - \tilde{a} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} J'_S(\xi,\eta) \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\ + \tilde{a} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} J'_S(\xi,\eta) \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta, \quad (2.2.1)$$

mas $J'_S(\xi,\eta) = \text{constante} = J'_{Si}$ em S_i , então

$$J'_S(x,y) = 1 - \tilde{a} \sum_{i=1}^N J'_{Si} \int_{S_i} \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\ + \tilde{a} \sum_{i=1}^N J'_{Si} \int_{S_i} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta. \quad (2.2.2)$$

Integrando toda a expressão (2.2.2) sobre um domínio parcial

S_k , temos

$$\int_{S_k} J'_S(x,y) dx dy = \int_{S_k} dx dy - \\ - \tilde{a} \sum_{i=1}^N J'_{Si} \int_{S_k} dx dy \int_{S_i} \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\ + \tilde{a} \sum_{i=1}^N J'_{Si} \int_{S_k} dx dy \int_{S_i} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta, \quad (2.2.3)$$

mas $J'_S(x,y) = \text{constante} = J'_{Sk}$; então, de (2.2.3) obtemos

$$J'_{Sk} = 1 - \tilde{a} \sum_{i=1}^N J'_{Si} \int_{S_i} \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\ + \tilde{a} \sum_{i=1}^N J'_{Si} \frac{1}{S_k} \int_{S_k} dx dy \int_{S_i} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta. \quad (2.2.4)$$

Usamos as definições de distância geométrica média (DGM) G_{ik} entre os domínios parciais i e k e de distância geométrica média (DGM) G_{i0} entre o domínio parcial i e a origem do sistema de coordenadas, introduzidas por Maxwell ²⁴

$$\ln G_{ik} = \frac{1}{S_i S_k} \int_{S_k} dx dy \int_{S_i} \ln [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta , \quad (2.2.5)$$

$$\ln G_{io} = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \ln [\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta . \quad (2.2.6)$$

Definimos ainda as grandezas

$$K_{ik} = S_i S_k \ln G_{ik} , \quad (2.2.7)$$

$$K_{io} = S_i S_k \ln G_{io} . \quad (2.2.8)$$

Substituímos (2.2.5) a (2.2.8) em (2.2.4) e obtemos

$$J'_{sk} = 1 - \tilde{a} \sum_{i=1}^N J'_{si} \frac{1}{S_k} K_{io} + \tilde{a} \sum_{i=1}^N J'_{si} \frac{1}{S_k} K_{ik} . \quad (2.2.9)$$

Como a área dos domínios parciais é constante, usamos a notação

$$S_k = S_d \quad (\forall k) , \quad (2.2.10)$$

para escrever (2.2.9) de forma mais compacta

$$J'_{sk} = 1 - \frac{\tilde{a}}{S_d} \sum_{i=1}^N (K_{io} - K_{ik}) J'_{si} \quad k = 1, 2, \dots, N . \quad (2.2.11)$$

Variando-se os índices i e k obtemos um sistema de N equações a N incógnitas, como segue:

$$\begin{aligned} J'_{s1} &= 1 + \frac{\tilde{a}}{S_d} [(K_{11}-K_{10})J'_{s1} + (K_{21}-K_{20})J'_{s2} + \dots + (K_{N1}-K_{N0})J'_{sN}] , \\ J'_{s2} &= 1 + \frac{\tilde{a}}{S_d} [(K_{12}-K_{10})J'_{s1} + (K_{22}-K_{20})J'_{s2} + \dots + (K_{N2}-K_{N0})J'_{sN}] , \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ J'_{sN} &= 1 + \frac{\tilde{a}}{S_d} [(K_{1N}-K_{10})J'_{s1} + (K_{2N}-K_{20})J'_{s2} + \dots + (K_{NN}-K_{N0})J'_{sN}] . \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Para os coeficientes relacionados com as DGM entre os domínios parciais, K_{ik} , existe uma simetria tal que

$$K_{ik} = K_{ki} \quad . \quad (2.2.13)$$

Quando $i = k$, a grandeza G_{ii} é chamada de DGM própria; a expressão que permite calculá-la consta no Apêndice C.

Definimos então as seguintes matrizes:

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (N \times 1 \text{ real}) \quad , \quad (2.2.14)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (N \times N \text{ real}) \quad , \quad (2.2.15)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}-K_{10} & K_{21}-K_{20} & \dots & K_{N1}-K_{N0} \\ K_{12}-K_{10} & K_{22}-K_{20} & \dots & K_{N2}-K_{N0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{1N}-K_{10} & K_{2N}-K_{20} & \dots & K_{NN}-K_{N0} \end{bmatrix} \quad (2.2.16)$$

(N × N real) ,

$$[J'_S] = \begin{bmatrix} J'_{S1} \\ J'_{S2} \\ \vdots \\ \vdots \\ J'_{SN} \end{bmatrix} \quad (N \times 1 \text{ complexa}) \quad . \quad (2.2.17)$$

Em notação matricial, o sistema (2.2.12) pode ser escrito na forma

$$[J'_s] = [U] + \frac{\tilde{a}}{S_d} [K] [J'_s] \quad . \quad (2.2.18)$$

A equação matricial (2.2.18) representa a forma discretizada da equação integral contínua (2.1.27).

Já a equação (2.1.28) é discretizada de forma simples, obtendo-se

$$I_T = C \int_S J'_s(x,y) \, dx \, dy = C \sum_{i=1}^N \int_{S_i} J'_s(x,y) \, dx \, dy \quad .$$

Pelos mesmos argumentos anteriores, temos

$$J'_s(x,y) = \text{constante} = J'_{si} \text{ em } S_i \text{ e}$$

$$S_i = S_d \quad ,$$

resultando

$$I_T = CS_d \sum_{i=1}^N J'_{si} \quad . \quad (2.2.19)$$

Em resumo, nesta Seção, aplicamos o conceito de discretização às equações (2.1.27) e (2.1.28), subdividindo o condutor em N sub-condutores paralelos e de iguais dimensões; obtivemos então uma equação para cada sub-condutor. Usamos as definições de DGM entre duas figuras e DGM de uma figura a um ponto e substituímos as integrais pelos coeficientes K_{ik} e K_{io} , os quais dependem somente da geometria. Resultou então um sistema de N equações algébricas, lineares e não-homogêneas a N incógnitas.

Os coeficientes K_{ik} e K_{io} podem ser calculados de diversas formas. Nos Apêndices B e C deste trabalho, apresentamos um cálculo detalhado.

2.3 SOLUÇÃO E CÁLCULO DAS DENSIDADES DE CORRENTE

Resolvemos a equação (2.2.18) de forma imediata, isolando-se a matriz $[J'_s]$, o que resultou

$$[J'_s] = \{[I] - \frac{\tilde{a}}{S_d}[K]\}^{-1}[U] . \quad (2.3.1)$$

A matriz entre chaves em (2.3.1), que deverá ser invertida, é uma matriz complexa, não-simétrica e não-esparsa.

Neste trabalho, a referida matriz é invertida usando-se o algoritmo de Shipley.⁴ Dentre os motivos que levaram à opção por este algoritmo citamos:

- a) não é necessária alocação de memória além daquela ocupada pela matriz dos coeficientes;
- b) simplicidade do algoritmo;
- c) tempo de execução reduzido, em relação aos algoritmos tradicionais.

Obtém-se a constante de normalização por

$$C = \frac{I_T}{S_d \sum_{i=1}^N J'_{si}} . \quad (2.3.2)$$

Combinamos (2.3.1) e (2.3.2) e determinamos a matriz

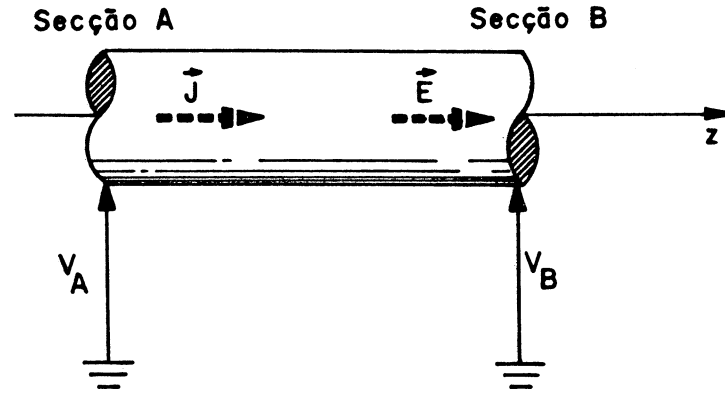
$$[J_s]: \quad [J_s] = C[J'_s] . \quad (2.3.3)$$

2.4 CÁLCULO DA IMPEDÂNCIA UNITÁRIA

Consideramos um trecho de condutor, de comprimento unitário, conforme a fig. 2.3.

Supõe-se que as secções A e B sejam superfícies equipotenciais com relação ao campo elétrico irrotacional \vec{E}_0 , e que seus potenciais em relação à referência sejam V_A e V_B respectivamente.

FIGURA 2.3 - TRECHO UNITÁRIO DO CONDUTOR



Partimos da definição de impedância complexa, dada por Paris

$$Z = \frac{\mathcal{V}}{I_T} \quad , \quad (2.4.1)$$

onde Z representa a impedância unitária e \mathcal{V} representa a parcela da voltagem devido ao campo irrotacional \vec{E}_O .²⁶ O valor de \mathcal{V} , por hipótese, independe de (x,y) . Observando-se (2.1.15), obtém-se para o trecho compreendido entre as seções A e B

$$\mathcal{V} = V_A - V_B = E_O \quad . \quad (2.4.2)$$

Resolve-se inicialmente o problema da distribuição de corrente, obtendo-se a constante de normalização C .

Expressa-se o potencial vetor magnético na origem do sistema de coordenadas, com o uso da expressão

$$A_S(0) = - \frac{\mu_O}{2\pi} I_T \ln G_O \quad , \quad (2.4.3)$$

onde G_O representa a DGM da seção transversal do condutor à origem O (p.183).¹²

Substituímos (2.4.2), (2.4.3) e (2.1.26) em (2.4.1) e obtivemos

$$Z = \frac{C}{\sigma I_T} - j \frac{\omega \mu_O}{2\pi} \ln G_O \quad . \quad (2.4.4)$$

Em função das densidades de corrente, obtivemos

$$Z = \frac{C}{N \sigma S_d \sum_{i=1}^{\infty} J_{si}} - j \frac{\omega \mu_0}{2\pi} \ln G_0, \quad (2.4.5)$$

ou, caso sejam usadas as densidades relativas

$$Z = \frac{1}{N \sigma S_d \sum_{i=1}^{\infty} J'_{si}} - j \frac{\omega \mu_0}{2\pi} \ln G_0. \quad (2.4.6)$$

A resistência unitária do condutor, em corrente alternada, é dada por

$$R_{ca} = \operatorname{Re} \{Z\}. \quad (2.4.7)$$

A reatância unitária é dada por

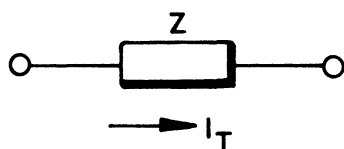
$$X = \operatorname{Im} \{Z\}. \quad (2.4.8)$$

A resistência unitária do condutor, em corrente contínua, é dada por

$$R_{cc} = \frac{1}{N \sigma S_d}. \quad (2.4.9)$$

O trecho unitário do condutor terá para circuito equivalente o da fig. 2.4.

FIGURA 2.4 - CIRCUITO EQUIVALENTE PARA O CONDUTOR

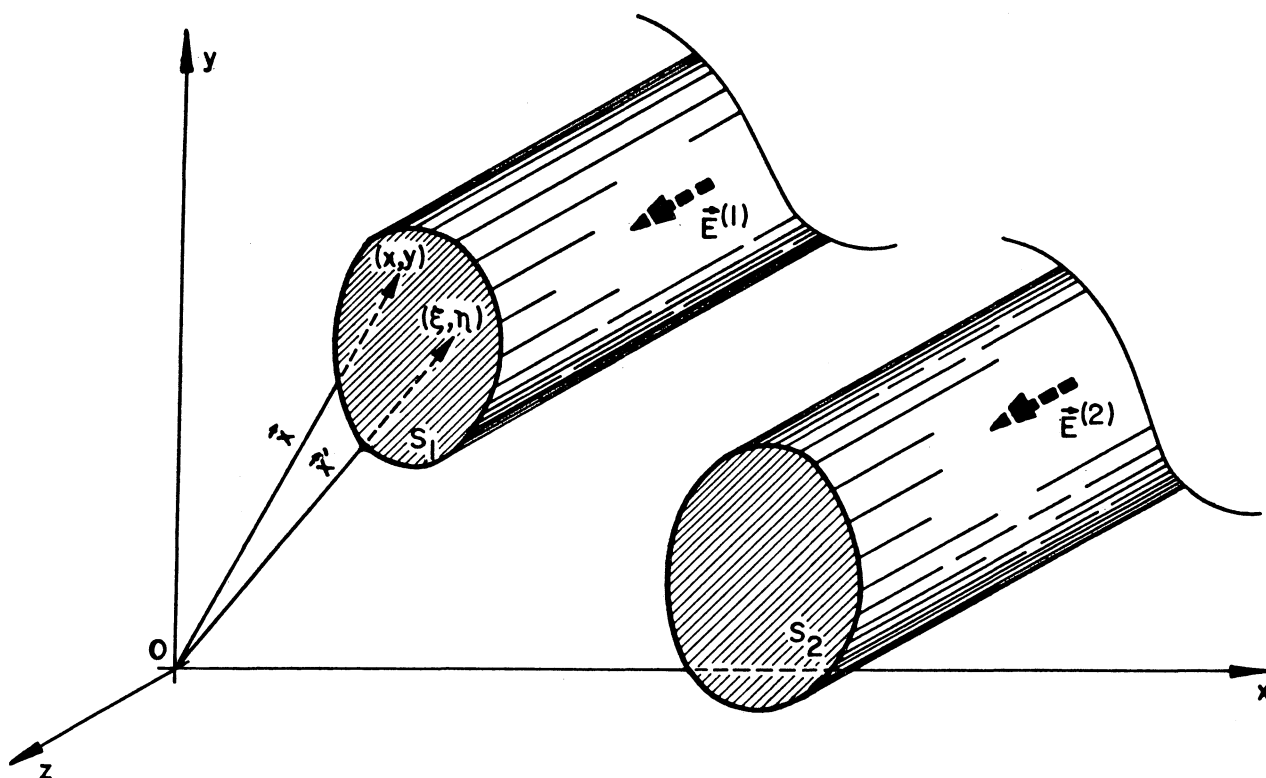


CAPÍTULO 3
EXTENSÃO PARA CASOS DE
DOIS CONDUTORES

Melhoramos a solução desenvolvida no Capítulo 2, de forma a levar em conta os efeitos pelicular e de proximidade, simultaneamente.

Consideramos dois condutores cilíndricos, de secções transversais quaisquer, cujos eixos são paralelos ao eixo Oz, conforme a fig. 3.1.

FIGURA 3.1 - DISPOSIÇÃO GEOMÉTRICA



3.1 ESTABELECIMENTO DA EQUAÇÃO INTEGRAL

Partimos das hipóteses da Seção 2.1, com exceção da primeira, supondo ainda que os dois condutores são constituídos do mesmo material e que estão submetidos a campos de mesma frequência ω .

Usamos a notação $\vec{E}_O^{(1)}(\vec{x}, t)$ para o campo elétrico aplicado ao condutor 1, $\vec{E}_O^{(2)}(\vec{x}, t)$ para o campo elétrico aplicado ao condutor 2, $\vec{J}^{(1)}(\vec{x}, t)$ para a densidade de corrente em pontos do condutor 1 e $\vec{J}^{(2)}(\vec{x}, t)$ para a densidade de corrente em pontos do condutor 2.

A expressão do potencial vetor magnético, no ponto posicionado por \vec{x} e no instante t , devido aos dois condutores infinitos, tem forma análoga à (2.1.21), na qual a integral é estendida sobre os domínios de integração S_1 e S_2 .

A equação (2.1.16), quando aplicada a cada condutor, fornece

$$\vec{J}^{(1)}(\vec{x}, t) = \sigma \vec{E}_O^{(1)}(\vec{x}, t) - \sigma \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad , \quad (3.1.1)$$

$$\vec{J}^{(2)}(\vec{x}, t) = \sigma \vec{E}_O^{(2)}(\vec{x}, t) - \sigma \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad , \quad (3.1.2)$$

respectivamente.

Tratamos o problema de forma escalar, pois, em vista da geometria cilíndrica dos condutores e do posicionamento do sistema de coordenadas, os vetores densidade de corrente, potencial vetor magnético e campo elétrico só têm componentes na direção z . Suas formas funcionais são semelhantes às dadas por (2.1.17), (2.1.19) e (2.1.20).

Separamos as partes espaciais e temporais das funções, como no Capítulo 2, obtendo

$$\begin{aligned}
 J_s^{(1)}(x,y) = & \sigma E_o^{(1)} - j\omega\sigma A_s(0) - \\
 & - \tilde{a} \int_{S_1} J_s^{(1)}(\xi,\eta) \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
 & + \tilde{a} \int_{S_1} J_s^{(1)}(\xi,\eta) \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta - \\
 & - \tilde{a} \int_{S_2} J_s^{(2)}(\xi,\eta) \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
 & + \tilde{a} \int_{S_2} J_s^{(2)}(\xi,\eta) \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.1.3}$$

$$\begin{aligned}
 J_s^{(2)}(x,y) = & \sigma E_o^{(2)} - j\omega\sigma A_s(0) - \\
 & - \tilde{a} \int_{S_1} J_s^{(1)}(\xi,\eta) \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
 & + \tilde{a} \int_{S_1} J_s^{(1)}(\xi,\eta) \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta - \\
 & - \tilde{a} \int_{S_2} J_s^{(2)}(\xi,\eta) \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
 & + \tilde{a} \int_{S_2} J_s^{(2)}(\xi,\eta) \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta \quad .
 \end{aligned}
 \tag{3.1.4}$$

As equações (3.1.3) e (3.1.4) formam um sistema de equações integrais simultâneas.

Na equação (3.1.3), a parcela $\sigma E_o^{(1)}$ representa uma parcela irrotacional. As demais parcelas são de origem rotacional. As duas primeiras integrais do segundo membro representam o efeito pelicular, enquanto que as duas últimas integrais representam o efeito de proximidade do condutor 2 sobre o condutor 1.

Na equação (3.1.4), a parcela $\sigma E_o^{(2)}$ é irrotacional. As duas primeiras integrais do segundo membro representam o efeito de proximidade do condutor 1 sobre o condutor 2, e as duas últimas integrais representam o efeito pelicular.

Fazemos, ainda, as seguintes imposições

$$\int_{S_1} J_s^{(1)}(x,y) dx dy = I_T^{(1)} \quad , \quad (3.1.5)$$

$$\int_{S_2} J_s^{(2)}(x,y) dx dy = I_T^{(2)} \quad , \quad (3.1.6)$$

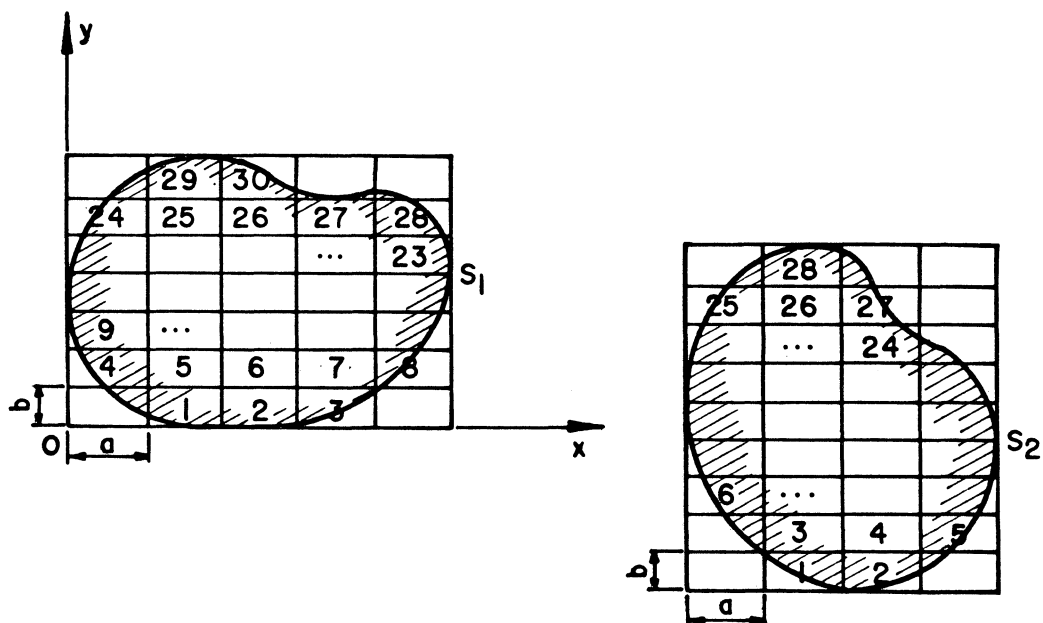
onde $I_T^{(1)}$ denota a corrente total no condutor 1 e $I_T^{(2)}$ a corrente total no condutor 2. Estas correntes são representadas por números complexos, possuindo fases ϕ_1 e ϕ_2 , respectivamente. Os símbolos $I_T^{(1)}$ e $I_T^{(2)}$ não englobam o fator temporal $e^{j\omega t}$.

As equações (3.1.3) a (3.1.6) foram obtidas por Manneback através de outra forma de dedução.²¹

3.2 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL

Para o estabelecimento das equações discretizadas, procedemos da mesma forma que no caso de um único condutor, conforme a fig. 3.2.

FIGURA 3.2 - SUBDIVISÃO DAS SECÇÕES TRANSVERSAIS



Supomos que todos os domínios parciais tenham áreas iguais e que sejam indexados por i , com $i = 1, 2, \dots, N_1$ em S_1 e $i = 1, 2, \dots, N_2$ em S_2 .

Como, por hipótese, a densidade de corrente no interior dos domínios parciais é constante, as equações (3.1.3) e (3.1.4) podem ser escritas sob a forma:

$$\begin{aligned}
J_s^{(1)}(x,y) = & \sigma E_O^{(1)} - j\omega\sigma A_s(0) - \\
& - \tilde{a} \sum_{i=1}^{N_1} J_{si}^{(1)} \int_{S_{1i}} \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
& + \tilde{a} \sum_{i=1}^{N_1} J_{si}^{(1)} \int_{S_{1i}} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta - \\
& - \tilde{a} \sum_{i=1}^{N_2} J_{si}^{(2)} \int_{S_{2i}} \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
& + \tilde{a} \sum_{i=1}^{N_2} J_{si}^{(2)} \int_{S_{2i}} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta, \quad (3.2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_s^{(2)}(x,y) = & \sigma E_O^{(2)} - j\omega\sigma A_s(0) - \\
& - \tilde{a} \sum_{i=1}^{N_1} J_{si}^{(1)} \int_{S_{1i}} \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
& + \tilde{a} \sum_{i=1}^{N_1} J_{si}^{(1)} \int_{S_{1i}} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta - \\
& - \tilde{a} \sum_{i=1}^{N_2} J_{si}^{(2)} \int_{S_{2i}} \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
& + \tilde{a} \sum_{i=1}^{N_2} J_{si}^{(2)} \int_{S_{2i}} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta, \quad (3.2.2)
\end{aligned}$$

nas quais $J_{si}^{(1)}$ e $J_{si}^{(2)}$ representam as densidades de corrente no i -ésimo domínio parcial do condutor 1 e do condutor 2, respectivamente; os domínios de integração S_{1i} e S_{2i} referem-se ao i -ésimo domínio parcial dos condutores 1 e 2, respectivamente.

Integramos (3.2.1) sobre o k-ésimo domínio parcial do condutor 1 e (3.2.2) sobre o k-ésimo domínio parcial do condutor 2, obtendo:

$$\begin{aligned}
 J_{sk}^{(1)} &= \sigma E_O^{(1)} - j\omega\sigma A_s(0) - \\
 &- \tilde{a} \sum_{i=1}^{N_1} J_{si}^{(1)} \int_{S_{1i}} \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
 &+ \frac{\tilde{a}}{S_d} \sum_{i=1}^{N_1} J_{si}^{(1)} \int_{S_{1k}} dx dy \int_{S_{1i}} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta - \\
 &- \tilde{a} \sum_{i=1}^{N_2} J_{si}^{(2)} \int_{S_{2i}} \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
 &+ \frac{\tilde{a}}{S_d} \sum_{i=1}^{N_2} J_{si}^{(2)} \int_{S_{1k}} dx dy \int_{S_{2i}} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta \quad (3.2.3) \\
 &\text{com } k = 1, 2, \dots, N_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{sk}^{(2)} &= \sigma E_O^{(2)} - j\omega\sigma A_s(0) - \\
 &- \tilde{a} \sum_{i=1}^{N_1} J_{si}^{(1)} \int_{S_{1i}} \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
 &+ \frac{\tilde{a}}{S_d} \sum_{i=1}^{N_1} J_{si}^{(1)} \int_{S_{2k}} dx dy \int_{S_{1i}} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta - \\
 &- \tilde{a} \sum_{i=1}^{N_2} J_{si}^{(2)} \int_{S_{2i}} \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
 &+ \frac{\tilde{a}}{S_d} \sum_{i=1}^{N_2} J_{si}^{(2)} \int_{S_{2k}} dx dy \int_{S_{2i}} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta \quad (3.2.4) \\
 &\text{com } k = 1, 2, \dots, N_2.
 \end{aligned}$$

Usamos as seguintes definições:

$$\ln G_{io}^{(1)} = \frac{1}{S_d} \int_{S_{1i}} \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta, \quad (3.2.5)$$

$$\ln G_{io}^{(2)} = \frac{1}{S_d} \int_{S_{2i}} \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta, \quad (3.2.6)$$

$$\ln G_{ik}^{11} = \frac{1}{S_d} \int_{S_{1k}} dx dy \int_{S_{1i}} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta, \quad (3.2.7)$$

$$\ln G_{ik}^{22} = \frac{1}{S_d} \int_{S_{2k}} dx dy \int_{S_{2i}} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta, \quad (3.2.8)$$

$$\ln G_{ik}^{21} = \frac{1}{S_d} \int_{S_{1k}} dx dy \int_{S_{2i}} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta, \quad (3.2.9)$$

$$\ln G_{ik}^{12} = \frac{1}{S_d} \int_{S_{2k}} dx dy \int_{S_{1i}} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta, \quad (3.2.10)$$

nas quais $G_{io}^{(j)}$ representa a DGM do i -ésimo domínio parcial do j -ésimo ($j = 1, 2$) condutor à origem; $G_{ik}^{j\ell}$ representa a DGM entre o i -ésimo domínio parcial do j -ésimo condutor e o k -ésimo domínio parcial do ℓ -ésimo condutor ($\ell = 1, 2$).

Definimos ainda

$$K_{ik}^{11} = S_d^{-2} [\ln G_{ik}^{11} - \ln G_{io}^{(1)}] \quad , \quad (3.2.11)$$

$$K_{ik}^{22} = S_d^{-2} [\ln G_{ik}^{22} - \ln G_{io}^{(2)}] \quad , \quad (3.2.12)$$

$$K_{ik}^{21} = S_d^{-2} [\ln G_{ik}^{21} - \ln G_{io}^{(2)}] \quad , \quad (3.2.13)$$

$$K_{ik}^{12} = S_d^{-2} [\ln G_{ik}^{12} - \ln G_{io}^{(1)}] \quad . \quad (3.2.14)$$

Com a substituição de (3.2.5) a (3.2.14) em (3.2.3) e (3.2.4), obtêm-se:

$$J_{sk}^{(1)} = \sigma E_o^{(1)} - j\omega\sigma A_s(0) + \frac{\tilde{a}}{S_d} \left[\sum_{i=1}^{N_1} J_{si}^{(1)} K_{ik}^{11} + \sum_{i=1}^{N_2} J_{si}^{(2)} K_{ik}^{21} \right] \quad (3.2.15)$$

com $k = 1, 2, \dots, N_1$,

$$J_{sk}^{(2)} = \sigma E_o^{(2)} - j\omega\sigma A_s(0) + \frac{\tilde{a}}{S_d} \left[\sum_{i=1}^{N_1} J_{si}^{(1)} K_{ik}^{12} + \sum_{i=1}^{N_2} J_{si}^{(2)} K_{ik}^{22} \right] \quad (3.2.16)$$

com $k = 1, 2, \dots, N_2$.

Escrevemos as $(N_1 + N_2)$ equações de forma explícita, obtendo:

$$\begin{aligned}
 J_{s1}^{(1)} &= \sigma E_O^{(1)} - j\omega\sigma A_s(0) + \frac{\tilde{a}}{S_d} \left[J_{s1}^{(1)} K_{11}^{11} + J_{s2}^{(1)} K_{21}^{11} + \dots + J_{sN_1}^{(1)} K_{N_1 1}^{11} + \right. \\
 &\quad \left. + J_{s1}^{(2)} K_{11}^{21} + J_{s2}^{(2)} K_{21}^{21} + \dots + J_{sN_2}^{(2)} K_{N_2 1}^{21} \right], \\
 J_{s2}^{(1)} &= \sigma E_O^{(1)} - j\omega\sigma A_s(0) + \frac{\tilde{a}}{S_d} \left[J_{s1}^{(1)} K_{12}^{11} + J_{s2}^{(1)} K_{22}^{11} + \dots + J_{sN_1}^{(1)} K_{N_1 2}^{11} + \right. \\
 &\quad \left. + J_{s1}^{(2)} K_{12}^{21} + J_{s2}^{(2)} K_{22}^{21} + \dots + J_{sN_2}^{(2)} K_{N_2 2}^{21} \right], \\
 &\vdots \\
 J_{sN_1}^{(1)} &= \sigma E_O^{(1)} - j\omega\sigma A_s(0) + \frac{\tilde{a}}{S_d} \left[J_{s1}^{(1)} K_{1N_1}^{11} + J_{s2}^{(1)} K_{2N_1}^{11} + \dots + J_{sN_1}^{(1)} K_{N_1 N_1}^{11} + \right. \\
 &\quad \left. + J_{s1}^{(2)} K_{1N_1}^{21} + J_{s2}^{(2)} K_{2N_1}^{21} + \dots + J_{sN_2}^{(2)} K_{N_2 N_1}^{21} \right], \\
 J_{s1}^{(2)} &= \sigma E_O^{(2)} - j\omega\sigma A_s(0) + \frac{\tilde{a}}{S_d} \left[J_{s1}^{(1)} K_{11}^{12} + J_{s2}^{(1)} K_{21}^{12} + \dots + J_{sN_1}^{(1)} K_{N_1 1}^{12} + \right. \\
 &\quad \left. + J_{s1}^{(2)} K_{11}^{22} + J_{s2}^{(2)} K_{21}^{22} + \dots + J_{sN_2}^{(2)} K_{N_2 1}^{22} \right], \\
 J_{s2}^{(2)} &= \sigma E_O^{(2)} - j\omega\sigma A_s(0) + \frac{\tilde{a}}{S_d} \left[J_{s1}^{(1)} K_{12}^{12} + J_{s2}^{(1)} K_{22}^{12} + \dots + J_{sN_1}^{(1)} K_{N_1 2}^{12} + \right. \\
 &\quad \left. + J_{s1}^{(2)} K_{12}^{22} + J_{s2}^{(2)} K_{22}^{22} + \dots + J_{sN_2}^{(2)} K_{N_2 2}^{22} \right], \\
 &\vdots \\
 J_{sN_2}^{(2)} &= \sigma E_O^{(2)} - j\omega\sigma A_s(0) + \frac{\tilde{a}}{S_d} \left[J_{s1}^{(1)} K_{1N_2}^{12} + J_{s2}^{(1)} K_{2N_2}^{12} + \dots + J_{sN_1}^{(1)} K_{N_1 N_2}^{12} + \right. \\
 &\quad \left. + J_{s1}^{(2)} K_{1N_2}^{22} + J_{s2}^{(2)} K_{2N_2}^{22} + \dots + J_{sN_2}^{(2)} K_{N_2 N_2}^{22} \right].
 \end{aligned}$$

(3.2.17)

Definimos as seguintes matrizes:

$$[C_O] = \begin{bmatrix} \sigma E_O^{(1)} - j\omega\sigma A_S(0) \\ \sigma E_O^{(1)} - j\omega\sigma A_S(0) \\ \vdots \\ \sigma E_O^{(1)} - j\omega\sigma A_S(0) \\ \hline \sigma E_O^{(2)} - j\omega\sigma A_S(0) \\ \sigma E_O^{(2)} - j\omega\sigma A_S(0) \\ \vdots \\ \sigma E_O^{(2)} - j\omega\sigma A_S(0) \end{bmatrix} \quad (N_1+N_2) \times 1 \text{ complexa} \quad (3.2.18)$$

$$[J_S] = \begin{bmatrix} J_{s1}^{(1)} \\ J_{s2}^{(1)} \\ \vdots \\ J_{sN_1}^{(1)} \\ \hline J_{s1}^{(2)} \\ J_{s2}^{(2)} \\ \vdots \\ J_{sN_2}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (N_1+N_2) \times 1 \text{ complexa} , \quad (3.2.19)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^{11} & K_{21}^{11} & \dots & K_{N_1 1}^{11} & K_{11}^{21} & K_{21}^{21} & \dots & K_{N_2 1}^{21} \\ K_{12}^{11} & K_{22}^{11} & \dots & K_{N_1 2}^{11} & K_{12}^{21} & K_{22}^{21} & \dots & K_{N_2 2}^{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{1N_1}^{11} & K_{2N_1}^{11} & \dots & K_{N_1 N_1}^{11} & K_{1N_1}^{21} & K_{2N_1}^{21} & \dots & K_{N_2 N_1}^{21} \\ \hline K_{11}^{12} & K_{21}^{12} & \dots & K_{N_1 1}^{12} & K_{11}^{22} & K_{21}^{22} & \dots & K_{N_2 1}^{22} \\ K_{12}^{12} & K_{22}^{12} & \dots & K_{N_1 2}^{12} & K_{12}^{22} & K_{22}^{22} & \dots & K_{N_2 2}^{22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{1N_2}^{12} & K_{2N_2}^{12} & \dots & K_{N_1 N_2}^{12} & K_{1N_2}^{22} & K_{2N_2}^{22} & \dots & K_{N_2 N_2}^{22} \end{bmatrix} \quad (3.2.20)$$

$(N_1 + N_2) \times (N_1 + N_2)$ real .

Em forma matricial, o sistema (3.2.17) pode ser escrito como

$$[J_s] = [C_o] + j \frac{\tilde{a}}{S_d} [K] [J_s] \quad , \quad (3.2.21)$$

o que é equivalente às equações (3.1.3) e (3.1.4).

As equações (3.1.5) e (3.1.6), discretizadas, apresentam a forma

$$S_d \sum_{i=1}^{N_1} J_{si}^{(1)} = I_T^{(1)} \quad , \quad (3.2.22)$$

$$S_d \sum_{i=1}^{N_2} J_{si}^{(2)} = I_T^{(2)} \quad . \quad (3.2.23)$$

Na montagem da matriz $[K]$ (3.2.20), usando as relações (3.2.11) a (3.2.14), valem as seguintes relações de simetria

$$G_{ik}^{11} = G_{ki}^{11} \quad , \quad (3.2.24)$$

$$G_{ik}^{22} = G_{ki}^{22} \quad , \quad (3.2.25)$$

$$G_{ik}^{12} = G_{ki}^{21} \quad , \quad (3.2.26)$$

$$G_{ik}^{21} = G_{ki}^{12} \quad . \quad (3.2.27)$$

Definimos, ainda, as seguintes sub-matrizes e sua notação:

$$[C_O]_1 = \begin{bmatrix} \sigma E_O^{(1)} - j\omega \sigma A_S(0) \\ \sigma E_O^{(1)} - j\omega \sigma A_S(0) \\ \vdots \\ \sigma E_O^{(1)} - j\omega \sigma A_S(0) \end{bmatrix} \quad (N_1 \times 1 \text{ complexa}), \quad (3.2.28)$$

$$[C_O]_2 = \begin{bmatrix} \sigma E_O^{(2)} - j\omega \sigma A_S(0) \\ \sigma E_O^{(2)} - j\omega \sigma A_S(0) \\ \vdots \\ \sigma E_O^{(2)} - j\omega \sigma A_S(0) \end{bmatrix} \quad (N_2 \times 1 \text{ complexa}), \quad (3.2.29)$$

$$[J_S]_1 = \begin{bmatrix} J_{s1}^{(1)} \\ J_{s2}^{(1)} \\ \vdots \\ J_{sN_1}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (N_1 \times 1 \text{ complexa}), \quad (3.2.30)$$

$$[J_S]_2 = \begin{bmatrix} J_{s1}^{(2)} \\ J_{s2}^{(2)} \\ \vdots \\ J_{sN_2}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (N_2 \times 1 \text{ complexa}), \quad (3.2.31)$$

$$[K]_{11} = \begin{bmatrix} K_{11}^{11} & K_{21}^{11} & \dots & K_{N_1 1}^{11} \\ K_{12}^{11} & K_{22}^{11} & \dots & K_{N_1 2}^{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1N_1}^{11} & K_{2N_1}^{11} & \dots & K_{N_1 N_1}^{11} \end{bmatrix} \quad (N_1 \times N_1 \text{ real}), \quad (3.2.32)$$

$$[K]_{22} = \begin{bmatrix} K_{11}^{22} & K_{21}^{22} & \dots & K_{N_2 1}^{22} \\ K_{12}^{22} & K_{22}^{22} & \dots & K_{N_2 2}^{22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{1N_2}^{22} & K_{2N_2}^{22} & \dots & K_{N_2 N_2}^{22} \end{bmatrix} \quad (N_2 \times N_2 \text{ real}), \quad (3.2.33)$$

$$[K]_{12} = \begin{bmatrix} K_{11}^{12} & K_{21}^{12} & \dots & K_{N_1 1}^{12} \\ K_{12}^{12} & K_{22}^{12} & \dots & K_{N_1 2}^{12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{1N_2}^{12} & K_{2N_2}^{12} & \dots & K_{N_1 N_2}^{12} \end{bmatrix} \quad (N_2 \times N_1 \text{ real}), \quad (3.2.34)$$

$$[K]_{21} = \begin{bmatrix} K_{11}^{21} & K_{21}^{21} & \dots & K_{N_2 1}^{21} \\ K_{12}^{21} & K_{22}^{21} & \dots & K_{N_2 2}^{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{1N_1}^{21} & K_{2N_1}^{21} & \dots & K_{N_2 N_1}^{21} \end{bmatrix} \quad (N_1 \times N_2 \text{ real}) \quad . \quad (3.2.35)$$

Denominamos as sub-matrizes $[K]_{11}$ e $[K]_{22}$ de sub-matrizes próprias e as sub-matrizes $[K]_{12}$ e $[K]_{21}$ de sub-matrizes de interação.

A equação (3.2.21) pode ser escrita em função das sub-matrizes como:

$$\begin{bmatrix} [J_s]_1 \\ [J_s]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_o]_1 \\ [C_o]_2 \end{bmatrix} + \frac{\tilde{a}}{s_d} \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{21} \\ [K]_{12} & [K]_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J_s]_1 \\ [J_s]_2 \end{bmatrix} . \quad (3.2.36)$$

3.3 SOLUÇÃO E CÁLCULO DAS DENSIDADES DE CORRENTE

Partindo-se de (3.2.21), da mesma forma que na Seção 2.3, obtém-se

$$[J_s] = \{ [I] - \frac{\tilde{a}}{S_d} [K] \}^{-1} [C_o] , \quad (3.3.1)$$

na qual a matriz $[C_o]$ ainda é desconhecida.

Definimos a matriz complexa $[H]$

$$[H] = \{ [I] - \frac{\tilde{a}}{S_d} [K] \}^{-1} = \begin{bmatrix} [H]_{11} & [H]_{21} \\ [H]_{12} & [H]_{22} \end{bmatrix} , \quad (3.3.2)$$

cujas sub-matrizes possuem dimensões idênticas às correspondentes sub-matrizes componentes da matriz $[K]$, dadas em (3.2.32) a (3.2.35).

Definimos, ainda, a matriz $[I_T]$ das correntes totais

$$[I_T] = \begin{bmatrix} I_T^{(1)} \\ I_T^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2 \times 1 \text{ complexa}) . \quad (3.3.3)$$

Os elementos de $[C_o]_1$ são iguais e valem C_{o1} e os elementos de $[C_o]_2$ são iguais e valem C_{o2} . Usamos as relações complementares (3.2.22) e (3.2.23), com a notação das operações matriciais do Apêndice A, para obter os elementos de $[C_o]$.

Assim tem-se

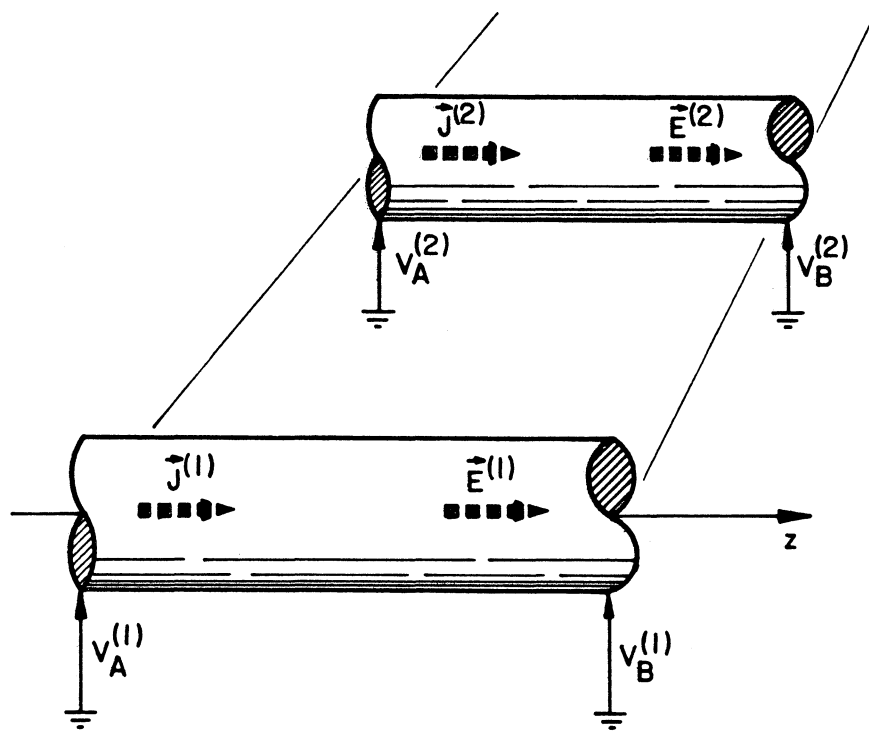
$$\begin{bmatrix} C_{o1} \\ C_{o2} \end{bmatrix} = \frac{1}{S_d} \begin{bmatrix} \Sigma [H]_{11} & \Sigma [H]_{21} \\ \Sigma [H]_{12} & \Sigma [H]_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_T^{(1)} \\ I_T^{(2)} \end{bmatrix} . \quad (3.3.4)$$

Inicialmente, procede-se ao cálculo da matriz $[H]$. Resolve-se, então, a equação (3.3.4), obtendo-se a matriz $[C_o]$, que é substituída em (3.3.1) para fornecer a solução final normalizada $[J_s]$.

3.4 CÁLCULO DAS IMPEDÂNCIAS UNITÁRIAS

Consideramos a fig. 3.3, na qual apresentam-se trechos de comprimento unitário dos condutores.

FIGURA 3.3 - TRECHOS UNITÁRIOS DOS CONDUTORES



Supõe-se que as secções $A^{(1)}$ e $B^{(1)}$ sejam superfícies equipotenciais em relação ao campo elétrico irrotacional $E_o^{(1)}$, e que as secções $A^{(2)}$ e $B^{(2)}$ sejam superfícies equipotenciais em relação ao campo elétrico irrotacional $E_o^{(2)}$ e que seus potenciais em relação à referência sejam $V_A^{(1)}$, $V_B^{(1)}$, $V_A^{(2)}$ e $V_B^{(2)}$, respectivamente.

Fazendo-se a consideração de que o sistema seja linear, vale o princípio da superposição de campos, tal que o potencial vetor magnético na origem pode ser escrito como

$$A_s(0) = -\frac{\mu_0}{2\pi} [I_T^{(1)} \ln G_O^{(1)} + I_T^{(2)} \ln G_O^{(2)}] \quad , \quad (3.4.1)$$

onde $G_O^{(1)}$ e $G_O^{(2)}$ são as DGM das secções $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$ à origem, respectivamente.

Obtêm-se, de forma imediata, a relação matricial:

$$\begin{bmatrix} C_{O1} \\ C_{O2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma E_O^{(1)} \\ \sigma E_O^{(2)} \end{bmatrix} + j \frac{\omega \sigma \mu_0}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln G_O^{(1)} & \ln G_O^{(2)} \\ \ln G_O^{(1)} & \ln G_O^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_T^{(1)} \\ I_T^{(2)} \end{bmatrix} \quad . \quad (3.4.2)$$

Substituímos (3.3.4) em (3.4.2), obtendo-se

$$\begin{bmatrix} E_O^{(1)} \\ E_O^{(2)} \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{\sigma S_d} \begin{bmatrix} \Sigma [H]_{11} & \Sigma [H]_{21} \\ \Sigma [H]_{12} & \Sigma [H]_{22} \end{bmatrix}^{-1} - j \frac{\omega \mu_0}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln G_O^{(1)} & \ln G_O^{(2)} \\ \ln G_O^{(1)} & \ln G_O^{(2)} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_T^{(1)} \\ I_T^{(2)} \end{bmatrix} \quad . \quad (3.4.3)$$

Consideramos a relação matricial

$$\begin{bmatrix} E_O^{(1)} \\ E_O^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_T^{(1)} \\ I_T^{(2)} \end{bmatrix} \quad , \quad (3.4.4)$$

como uma generalização de (2.4.1) e (2.4.2), na qual definimos

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad (3.4.5)$$

como sendo a matriz de impedâncias, a qual é complexa e simétrica. Os elementos z_{11} e z_{22} representam as impedâncias próprias, enquanto que z_{12} e z_{21} representam as impedâncias mútuas.

Obtêm-se a matriz $[Z]$ de:

$$[Z] = \frac{1}{\sigma S_d} \begin{bmatrix} \Sigma [H]_{11} & \Sigma [H]_{21} \\ \Sigma [H]_{12} & \Sigma [H]_{22} \end{bmatrix}^{-1} - j \frac{\omega \mu_0}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln G_o^{(1)} & \ln G_o^{(2)} \\ \ln G_o^{(1)} & \ln G_o^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

Introduzimos o conceito de impedância total de cada condutor, a partir de (2.4.1). Definimos $Z_T^{(1)}$ e $Z_T^{(2)}$ como sendo as impedâncias totais dos condutores 1 e 2, respectivamente.

A partir de (3.4.4), obtêm-se

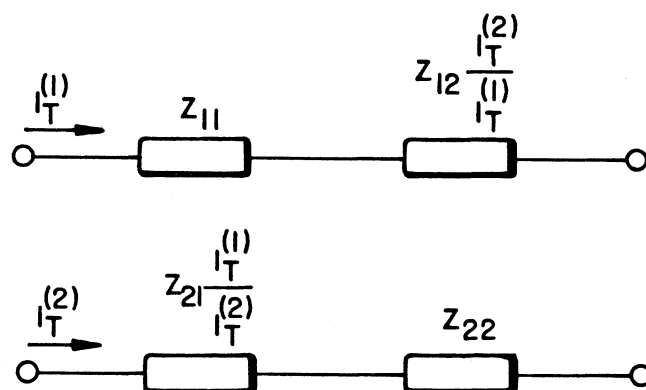
$$Z_T^{(1)} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_T^{(2)}}{I_T^{(1)}} \quad , \quad (3.4.7)$$

$$Z_T^{(2)} = Z_{22} + Z_{21} \frac{I_T^{(1)}}{I_T^{(2)}} \quad . \quad (3.4.8)$$

As resistências e reatâncias unitárias de cada condutor são obtidas pela aplicação dos operadores $\text{Re} \{ \}$ e $\text{Im} \{ \}$ sobre as correspondentes impedâncias totais.

Em termos das impedâncias totais, os circuitos equivalentes para os condutores são os seguintes:

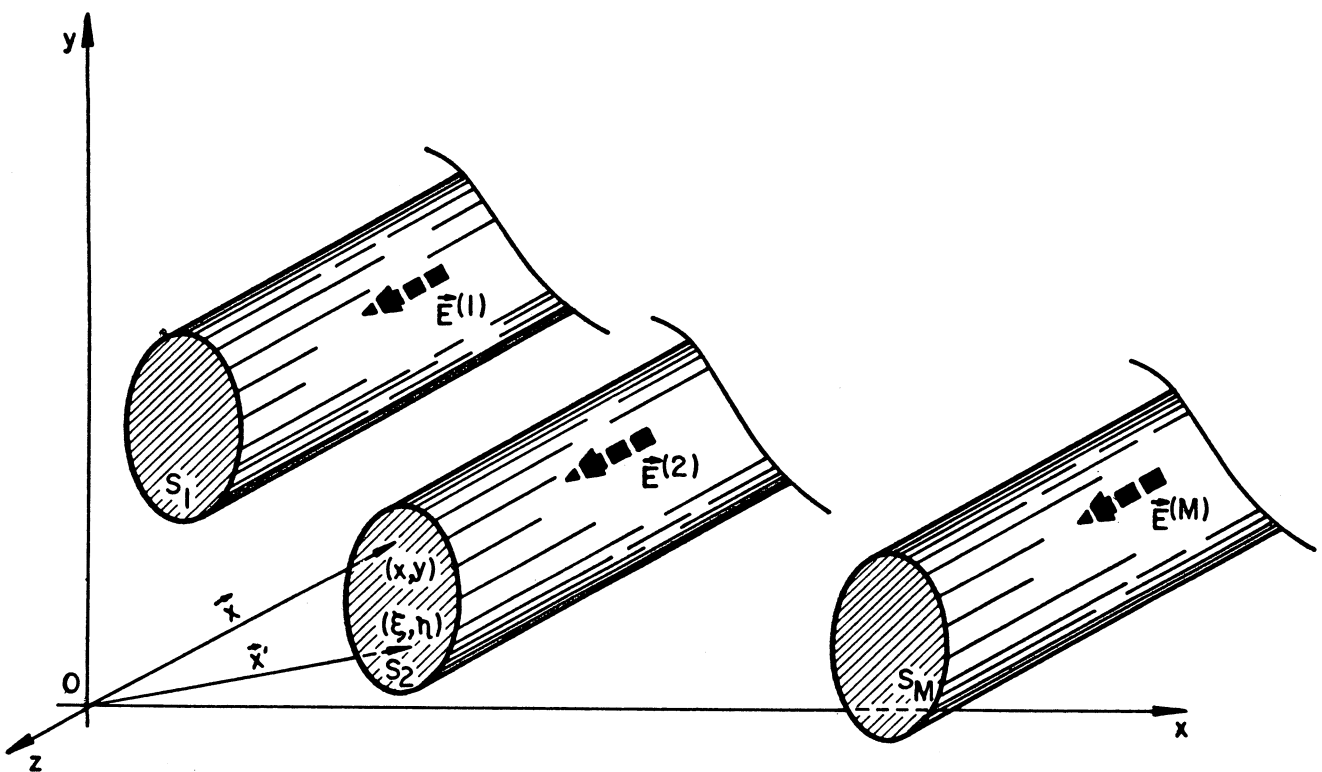
FIGURA 3.4 - CIRCUITOS EQUIVALENTES PARA OS CONDUTORES



CAPÍTULO 4
GENERALIZAÇÃO PARA CASOS DE
VÁRIOS CONDUTORES

Fazemos uma generalização do Capítulo 3 para tratar de casos de vários condutores, levando-se em conta os efeitos peculiar e de proximidade. Neste trabalho, esta generalização tem caráter teórico apenas, não sendo apresentadas aplicações numéricas.

FIGURA 4.1 - DISPOSIÇÃO GEOMÉTRICA



4.1 ESTABELECIMENTO DA EQUAÇÃO INTEGRAL

Usamos o formalismo desenvolvido no Capítulo 3 para generalizar as expressões da distribuição de correntes. Consideramos a geometria da fig. 4.1, supondo-se que existam M condutores paralelos entre si.

Generalizando as expressões (3.1.3) e (3.1.4) para o r-ésimo condutor, obtém-se

$$\begin{aligned}
 J_s^{(r)}(x,y) = & \sigma E_o^{(r)} - j\omega\sigma A_s(0) - \\
 & - \tilde{a} \int_{S_1} J_s^{(1)}(\xi,\eta) \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
 & + \tilde{a} \int_{S_1} J_s^{(1)}(\xi,\eta) \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta - \\
 & - \dots - \\
 & - \tilde{a} \int_{S_r} J_s^{(r)}(\xi,\eta) \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
 & + \tilde{a} \int_{S_r} J_s^{(r)}(\xi,\eta) \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta - \\
 & - \dots - \\
 & - \tilde{a} \int_{S_M} J_s^{(M)}(\xi,\eta) \ln[\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\xi d\eta + \\
 & + \tilde{a} \int_{S_M} J_s^{(M)}(\xi,\eta) \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} d\xi d\eta .
 \end{aligned}
 \tag{4.1.1}$$

Agora temos M equações da forma (4.1.1) formando um sistema de equações integrais simultâneas; onde $r = 1, 2, \dots, M$.

Adotamos a notação de sub-matrizes com o objetivo de obter expressões numa forma mais compacta. Usamos a notação $E_0^{(r)}$ para o campo elétrico aplicado ao r -ésimo condutor.

Impomos ainda, para cada condutor, a condição complementar

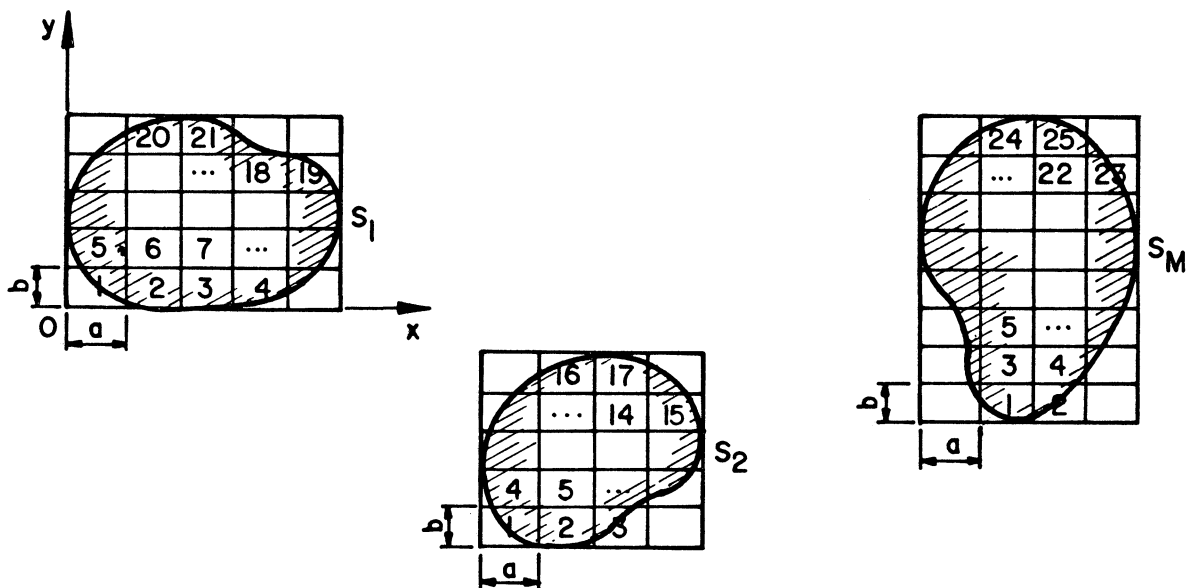
$$\int_{S_r} J_s^{(r)}(x,y) dx dy = I_T^{(r)} \quad , \quad (4.1.2)$$

onde $I_T^{(r)}$ é a corrente total no r -ésimo condutor. Esta corrente é representada por um número complexo, cuja fase é ϕ_r .

4.2 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL

O processo de discretização é análogo ao da Seção 3.2, com a subdivisão mostrada na fig. 4.2.

FIGURA 4.2 - SUBDIVISÃO DAS SECÇÕES TRANSVERSAIS



Supomos que todos os domínios parciais tenham áreas iguais e que sejam indexados por i , com $i = 1, 2, \dots, N_1$ em S_1 ; ...; $i = 1, 2, \dots, N_r$ em S_r ; ...; $i = 1, 2, \dots, N_M$ em S_M .

As M equações (4.1.1), quando discretizadas, formam um sistema de $(N_1 + N_2 + \dots + N_M)$ equações algébricas lineares, simultâneas e não-homogêneas, que sob a forma matricial é escrito como

$$[J_s] = [C_o] + \frac{\tilde{a}}{S_d} [K] [J_s] \quad . \quad (4.2.1)$$

Por operações matriciais, obtém-se

$$[J_s] = \{[I] - \frac{\tilde{a}}{S_d} [K]\}^{-1} [C_o]. \quad (4.2.2)$$

Usando a notação de sub-matrizes, tem-se:

$$[J_s] = \begin{bmatrix} [J_s]_1 \\ [J_s]_2 \\ \vdots \\ [J_s]_M \end{bmatrix} \quad (N_1 + N_2 + \dots + N_M) \times 1 \text{ complexa} \quad , \quad (4.2.3)$$

$$[C_o] = \begin{bmatrix} [C_o]_1 \\ [C_o]_2 \\ \vdots \\ [C_o]_M \end{bmatrix} \quad (N_1 + N_2 + \dots + N_M) \times 1 \text{ complexa} \quad , \quad (4.2.4)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{21} & \dots & [K]_{M1} \\ [K]_{12} & [K]_{22} & \dots & [K]_{M2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [K]_{1M} & [K]_{2M} & \dots & [K]_{MM} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (N_1 + N_2 + \dots + N_M) \times \\ (N_1 + N_2 + \dots + N_M) \text{ real} \end{matrix} \quad (4.2.5)$$

De forma esquemática, a matriz $[K]$ será formada por blocos, conforme a representação

$$[K] = \begin{bmatrix} \boxed{N_1 \times N_1} & \dots & \boxed{N_1 \times N_M} \\ \vdots & \boxed{N_2 \times N_2} & \vdots \\ \boxed{N_M \times N_1} & \dots & \boxed{N_M \times N_M} \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

As sub-matrizes formadoras da diagonal principal de $[K]$ são as sub-matrizes próprias, e as sub-matrizes fora da diagonal principal de $[K]$ são as sub-matrizes de interação.

A sub-matriz $[J_s]_r$ contém, em seus elementos, as densidades de corrente nos domínios parciais do r -ésimo condutor.

A sub-matriz $[C_o]_r$ possui todos os elementos iguais e valem

$$C_{or} = \sigma E_o^{(r)} - j\omega\sigma A_s(0) \quad (4.2.7)$$

A matriz $[K]$ é formada por sub-matrizes próprias e de interação.

As sub-matrizes próprias são representadas por

$$[K]_{rr} \quad \text{com } r = 1, 2, \dots, M, \quad (4.2.8)$$

cujas dimensões são $N_r \times N_r$.

As sub-matrizes de interação são representadas por

$$[K]_{rs} \quad \text{com } r,s = 1,2,\dots,M, \quad r \neq s, \quad (4.2.9)$$

cujas dimensões são $N_s \times N_r$.

Os elementos da sub-matriz $[K]_{rs}$ são dados por

$$K_{ik}^{rs} = S_d^2 \{ \ln G_{ik}^{rs} - \ln G_{io}^{(r)} \}, \quad (4.2.10)$$

onde

$$r,s = 1,2,\dots,M,$$

$$i = 1,2,\dots,N_r,$$

$$k = 1,2,\dots,N_s,$$

sendo que pela simetria do problema,

$$G_{ik}^{rs} = G_{ki}^{sr}. \quad (4.2.11)$$

A condição complementar (4.1.2) possui a forma discretizada

$$S_d \sum_{i=1}^{N_r} J_{si}^{(r)} = I_T^{(r)}.$$

4.3 SOLUÇÃO E CÁLCULO DAS DENSIDADES DE CORRENTE

O sistema de equações é resolvido de forma análoga à da Seção 3.3. Definimos a matriz $[I_T]$ das correntes totais

$$[I_T] = \begin{bmatrix} I_T^{(1)} \\ I_T^{(2)} \\ \vdots \\ I_T^{(M)} \end{bmatrix} \quad (M \times 1 \text{ complexa}), \quad (4.3.1)$$

e a matriz $[H]$

$$[H] = \{ [I] - \frac{\tilde{a}}{S_d} [K] \}^{-1} = \begin{bmatrix} [H]_{11} & [H]_{21} & \dots & [H]_{M1} \\ [H]_{12} & [H]_{22} & \dots & [H]_{M2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [H]_{1M} & [H]_{2M} & \dots & [H]_{MM} \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

Representamos os elementos da sub-matriz $[C_o]_r$ por C_{or} .

Generalizamos (3.3.4) de forma a obter a matriz das constantes:

$$\begin{bmatrix} C_{o1} \\ C_{o2} \\ \vdots \\ C_{oM} \end{bmatrix} = \frac{1}{S_d} \begin{bmatrix} \Sigma [H]_{11} & \Sigma [H]_{21} & \dots & \Sigma [H]_{M1} \\ \Sigma [H]_{12} & \Sigma [H]_{22} & \dots & \Sigma [H]_{M2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma [H]_{1M} & \Sigma [H]_{2M} & \dots & \Sigma [H]_{MM} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_T^{(1)} \\ I_T^{(2)} \\ \vdots \\ I_T^{(M)} \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

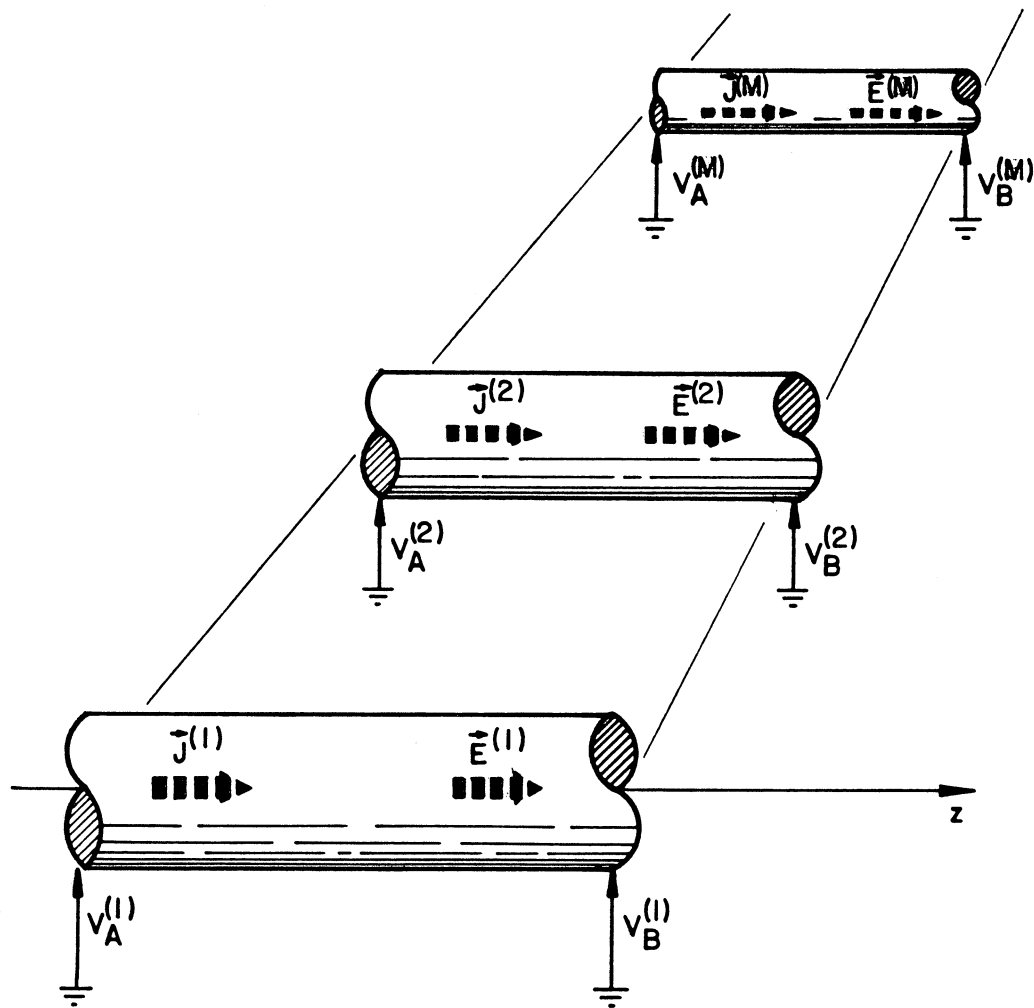
Calcula-se a matriz $[H]$ em (4.3.2) e aplica-se na expressão (4.3.3), obtendo-se a matriz das constantes $[C_o]$. Substitui-se $[C_o]$ em (4.2.2) e obtém-se a solução final normalizada $[J_s]$.

4.4 CÁLCULO DAS IMPEDÂNCIAS UNITÁRIAS

Para o cálculo da matriz de impedâncias, consideramos a fig. 4.3.

Consideramos trechos de condutores de comprimento unitário e tomamos duas secções $A^{(r)}$ e $B^{(r)}$, supostas superfícies equipotenciais em relação ao campo elétrico irrotacional $E_o^{(r)}$, tais que seus potenciais em relação à referência sejam $V_A^{(r)}$ e $V_B^{(r)}$, respectivamente.

FIGURA 4.3 - TRECHOS UNITÁRIOS DOS CONDUTORES



Pelo princípio da superposição de campos, o potencial vetor magnético na origem pode ser escrito como

$$A_S(0) = - \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\sum_{i=1}^M I_T^{(i)} \ln G_O^{(i)} \right] , \quad (4.4.1)$$

onde $G_O^{(i)}$ representa a DGM da secção $A^{(i)}$ à origem.

Definimos a matriz de impedâncias como

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1M} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{M1} & Z_{M2} & \dots & Z_{MM} \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

Generalizando (3.4.6) obtém-se

$$[Z] = \frac{1}{\sigma S_d} \begin{bmatrix} \Sigma [H]_{11} & \Sigma [H]_{21} & \dots & \Sigma [H]_{M1} \\ \Sigma [H]_{12} & \Sigma [H]_{22} & \dots & \Sigma [H]_{M2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma [H]_{1M} & \Sigma [H]_{2M} & \dots & \Sigma [H]_{MM} \end{bmatrix}^{-1} - j \frac{\omega \mu_0}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln G_O^{(1)} & \ln G_O^{(2)} & \dots & \ln G_O^{(M)} \\ \ln G_O^{(1)} & \ln G_O^{(2)} & \dots & \ln G_O^{(M)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ln G_O^{(1)} & \ln G_O^{(2)} & \dots & \ln G_O^{(M)} \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

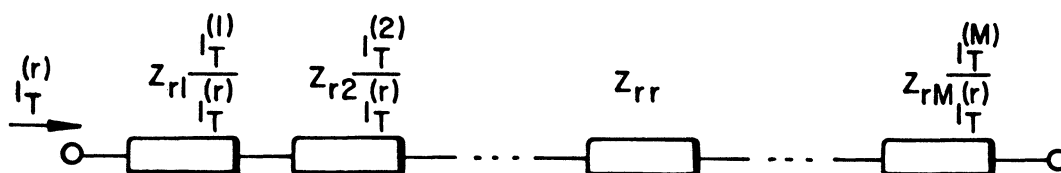
Introduzimos o conceito de impedância total de cada condutor. A partir da generalização de (3.4.4), (3.4.7) e (3.4.8), obtém-se a impedância total do r-ésimo condutor

$$Z_T^{(r)} = \sum_{i=1}^M Z_{ri} \frac{I_T^{(i)}}{I_T^{(r)}} \quad (4.4.4)$$

As resistências e reatâncias unitárias são obtidas pela aplicação dos operadores $\text{Re} \{ \}$ e $\text{Im} \{ \}$ sobre as correspondentes impedâncias totais.

O circuito equivalente para o r -ésimo condutor pode ser representado como na fig. 4.4.

FIGURA 4.4 - CIRCUITO EQUIVALENTE PARA O r -ÉSIMO CONDUTOR



CAPÍTULO 5

DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Com o objetivo de verificar a precisão das expressões desenvolvidas neste trabalho, fizemos comparações entre os resultados obtidos através das expressões aproximadas aqui desenvolvidas e os valores medidos experimentalmente. Os valores experimentais foram obtidos através de artigos. Cabe aqui comentar sobre o número reduzido de trabalhos experimentais publicados. Existem dificuldades de ordem prática com relação à determinação experimental dos perfis de densidades de corrente. Em trabalhos de Burke e Malewski são descritos métodos para efetuar tais medidas em situações particulares.^{5,20} Uma outra forma de verificar experimentalmente os efeitos pelicular e de proximidade, consiste na medida da impedância dos condutores. A maioria dos trabalhos experimentais é desenvolvida desta forma, porém, geralmente apresentam resultados somente da parte resistiva (parte real), nada citando sobre a parte reativa (parte imaginária). Foram consideradas diversas situações, com relação à geometria da secção transversal dos condutores, material constituinte e frequência do campo elétrico aplicado, de forma a permitir tantas comparações com dados experimentais quanto possível.

Para os cálculos, consideramos os dados das propriedades elétricas e magnéticas macroscópicas apresentadas pelo

Handbook of Chemistry and Physics.⁸ Todos os valores referem-se a uma temperatura de 20 °C. Para o cobre, tem-se $\sigma = 5,800.10^7$ S/m e $\mu = 1,256.10^{-6}$ H/m, para o alumínio $\sigma = 3,541.10^7$ S/m e $\mu = 1,256.10^{-6}$ H/m e para o chumbo $\sigma = 4,545.10^6$ S/m e $\mu = 1,256.10^{-6}$ H/m.

Conforme é usual na literatura especializada sobre efeitos pelicular e de proximidade, adota-se como variável independente, para algumas comparações, o parâmetro de frequência p , definido como

$$p = \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu}{\pi}} S \quad , \quad (5.1)$$

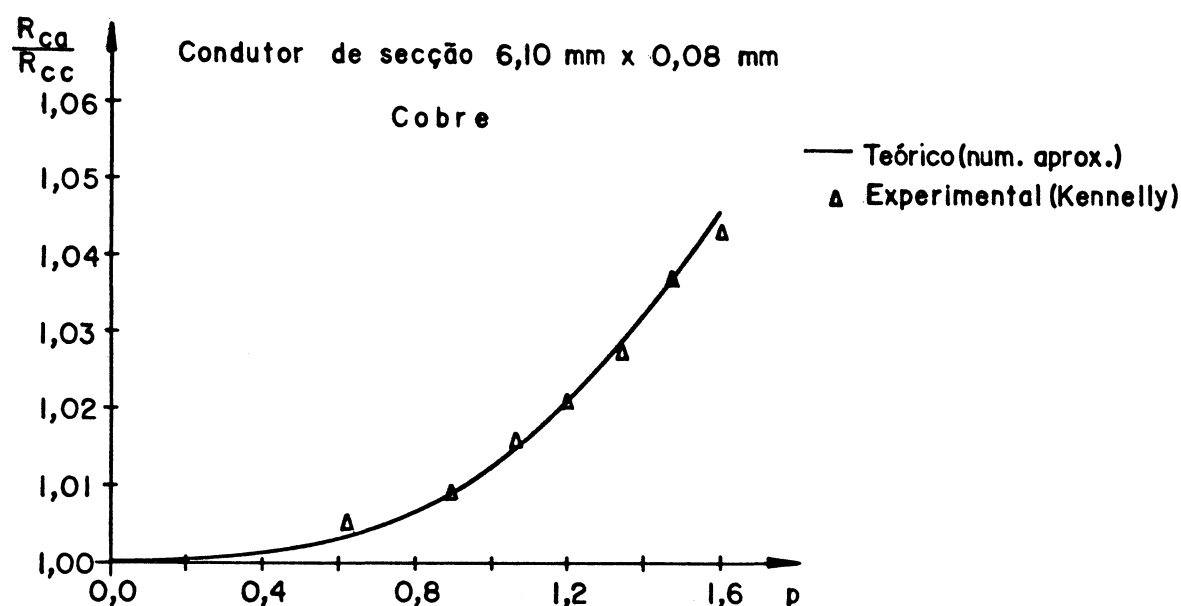
onde ω é a frequência angular dos campos elétrico e magnético e S é a área total da secção transversal do condutor.

Com base nos resultados experimentais de Kennelly relativos a fitas de cobre, fizemos a comparação entre os valores de R_{ca}/R_{cc} calculados e os medidos.¹⁸ Na fig. 5.1 temos a comparação feita para uma fita com secção transversal de 6,10 mm x 0,08 mm, subdividida em 120 domínios parciais, na faixa entre 0 e 40 kHz. A linha contínua refere-se aos valores calculados usando as expressões da Seção 2.4.

O número de domínios parciais em que o condutor foi subdividido é uma função da sua forma geométrica e da frequência, sendo que deve ser grande o suficiente para que haja convergência do resultado, conforme será discutido adiante.

Vê-se na fig. 5.1 a concordância apresentada entre os valores calculados e os medidos. Também desta figura conclui-se que a resistência efetiva em corrente alternada R_{ca} aumenta com a frequência, como resultado da maior concentração da corrente na periferia do condutor.

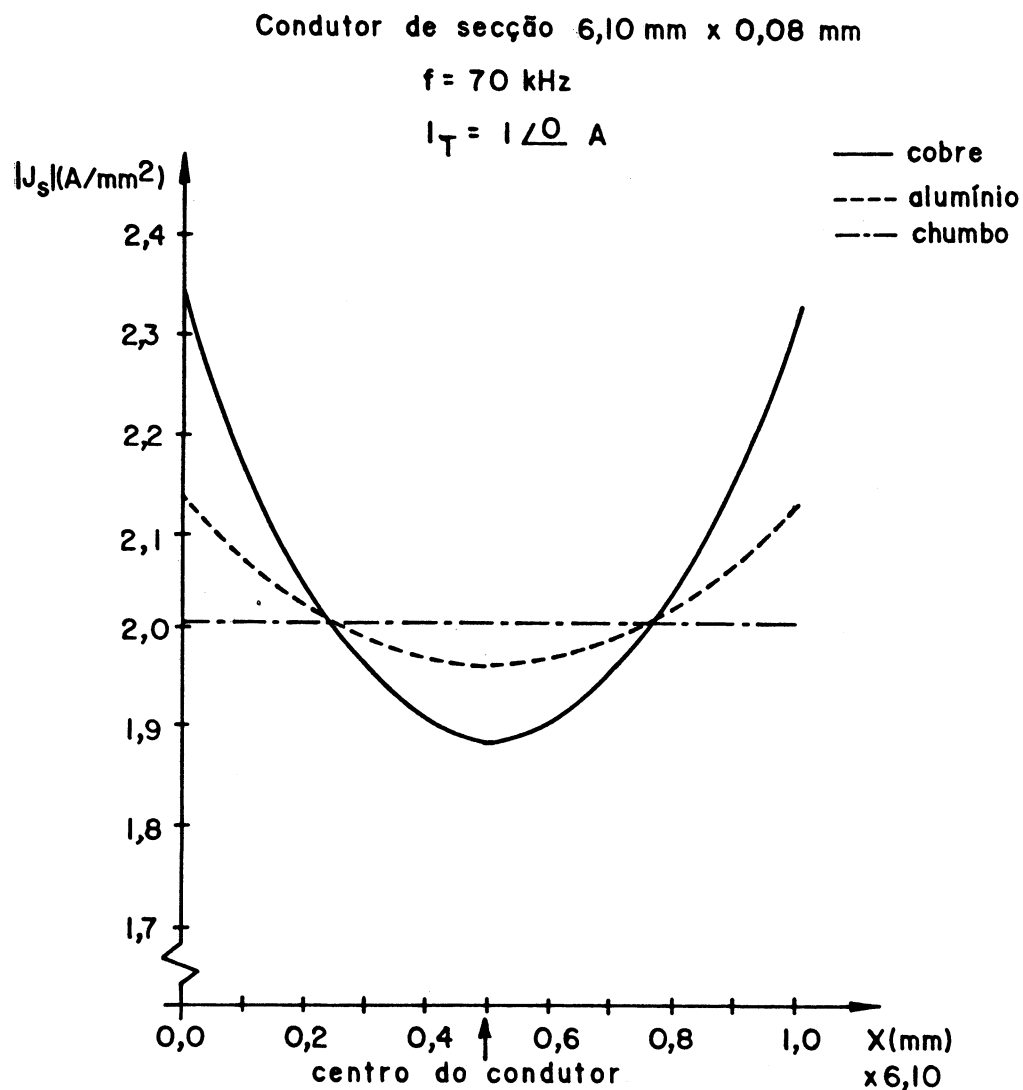
FIGURA 5.1 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS PARA FITAS DE COBRE



A forma da distribuição de corrente no interior do condutor varia com a condutividade σ . Assim, estudamos fitas com secção transversal de 6,10 mm x 0,08 mm, de cobre, alumínio e chumbo, submetidos a um campo elétrico aplicado de frequência igual a 70 kHz. Na fig. 5.2 vê-se a representação do perfil das densidades de corrente para cada metal. No eixo horizontal representa-se a largura geométrica da fita, e no eixo vertical os valores normalizados das densidades de corrente, calculados segundo as expressões aproximadas da Seção 2.3.

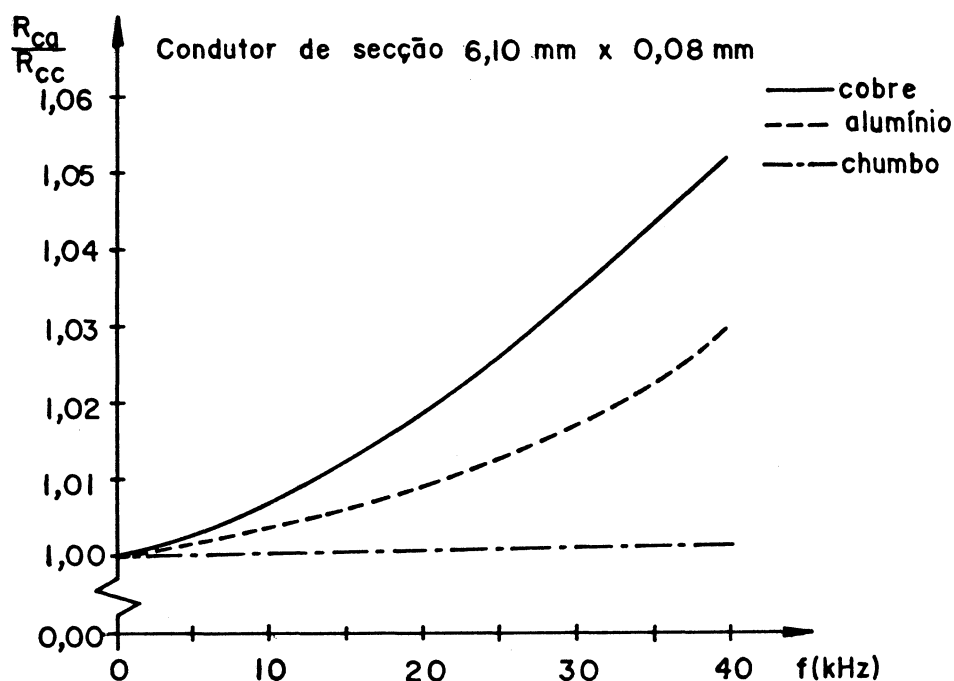
Concluimos da fig. 5.2 que quanto melhor for o condutor maior será a concentração da corrente em sua periferia. Para maus condutores, como por exemplo o chumbo, a distribuição é praticamente uniforme nesta frequência, como a que ocorre em corrente contínua.

FIGURA 5.2 - PERFIS DE DENSIDADES DE CORRENTE EM FITAS



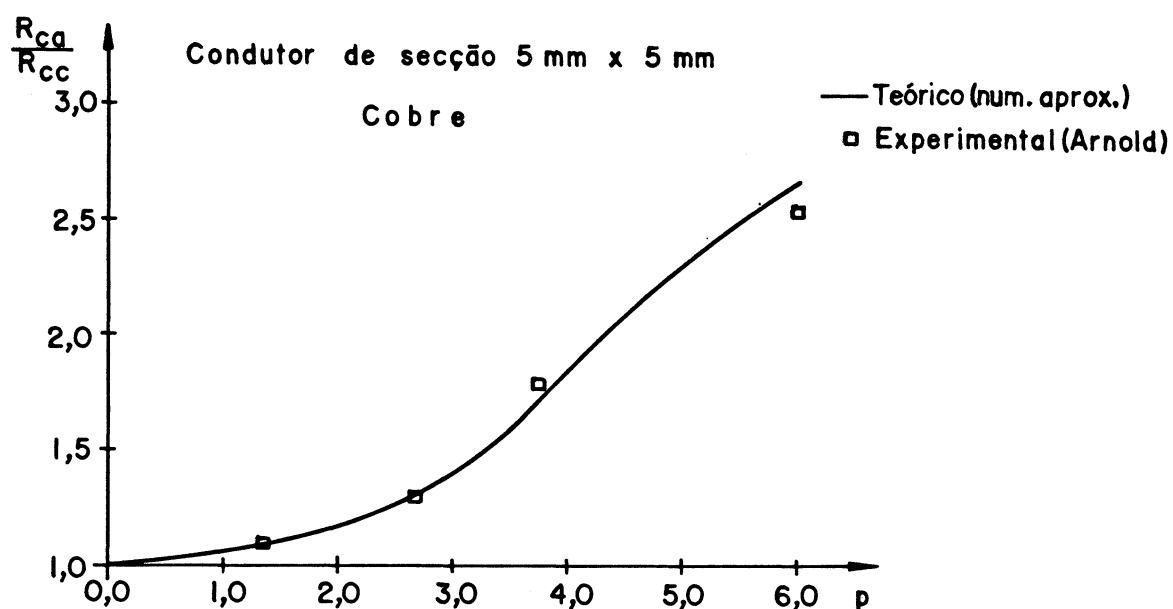
Devido à influência de σ sobre a distribuição de correntes, ocorre uma variação em R_{ca}/R_{cc} em função da frequência f , diferente para cada metal. Analisamos os condutores da fig. 5.2, na faixa de 0 a 40 kHz. O resultado está mostrado na fig. 5.3. Conforme citado anteriormente, nos bons condutores o efeito pelicular é pronunciado enquanto que nos maus condutores R_{ca}/R_{cc} sofre uma influência muito pequena de f .

FIGURA 5.3 - VARIAÇÃO EM R_{ca}/R_{cc} EM FUNÇÃO
DA FREQUÊNCIA PARA FITAS



Fizemos comparações para condutores de cobre, de secção transversal quadrada, a partir dos dados experimentais de Arnold.¹ Considerou-se um condutor com secção de 5 mm x 5 mm, subdividido em 121 domínios parciais. Na fig. 5.4 vê-se a concordância entre os valores de R_{ca}/R_{cc} calculados pelas expressões da Seção 2.4 e os valores medidos.

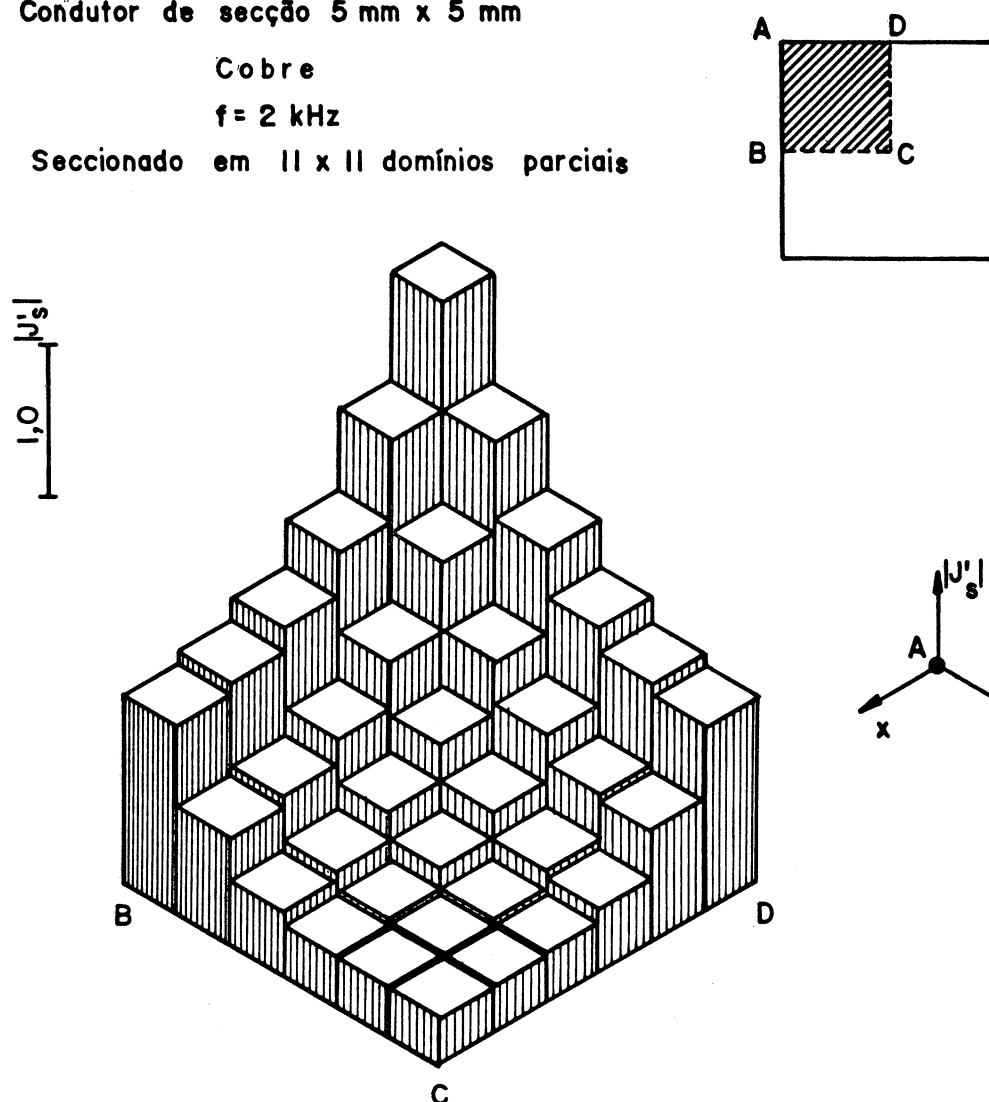
FIGURA 5.4 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS EM CONDUTOR QUADRADO



Para ilustrar o efeito da redistribuição da corrente devido à aplicação de campos alternados, vê-se na fig. 5.5 a representação pictorial das densidades de corrente no condutor quadrado considerado, na frequência de 2 kHz. Devido à simetria da distribuição, a figura mostra somente um dos octantes.

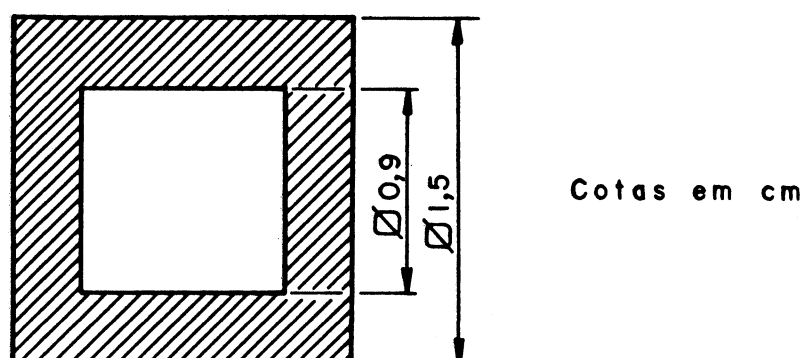
FIGURA 5.5 - REPRESENTAÇÃO PICTORIAL PARA SECÇÃO QUADRADA

Condutor de secção 5 mm x 5 mm
 Cobre
 $f = 2 \text{ kHz}$
 Seccionado em 11×11 domínios parciais

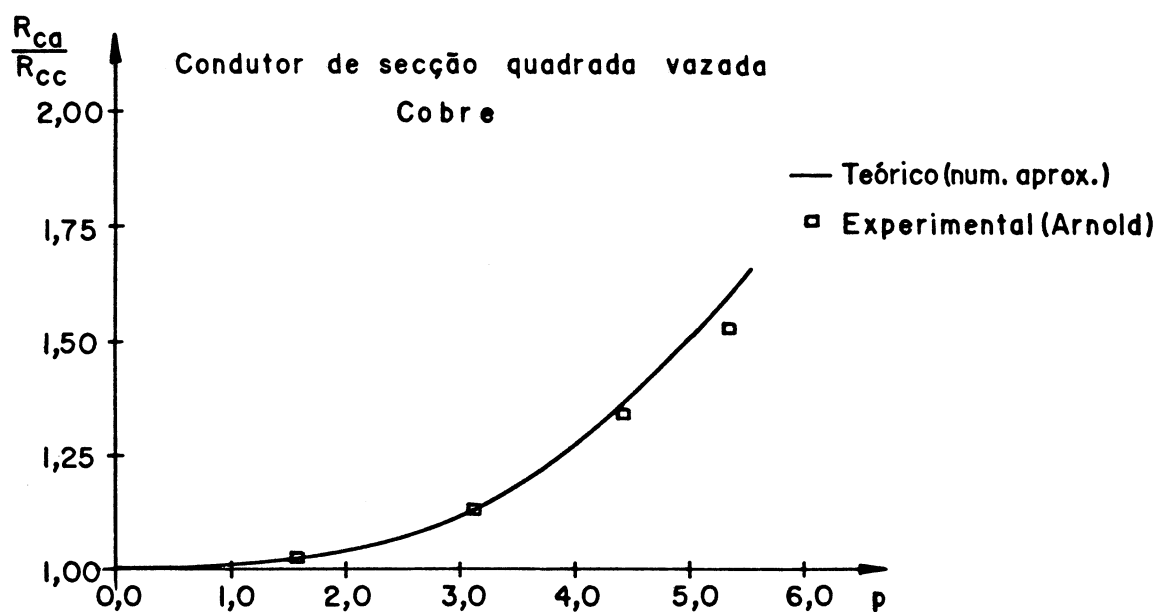


Para mostrar a aplicação das expressões e do algoritmo desenvolvidos neste trabalho em condutores cilíndricos de secção arbitrária, fizemos o estudo de um condutor de cobre, de secção transversal quadrada vazada. Os dados experimentais foram obtidos por Arnold e o cálculo foi feito considerando o condutor com secção externa de 15 mm x 15 mm e secção interna vazada de 9 mm x 9 mm, conforme a fig. 5.6, subdividido em 121 domínios parciais.¹

FIGURA 5.6 - SECÇÃO TRANSVERSAL QUADRADA VAZADA

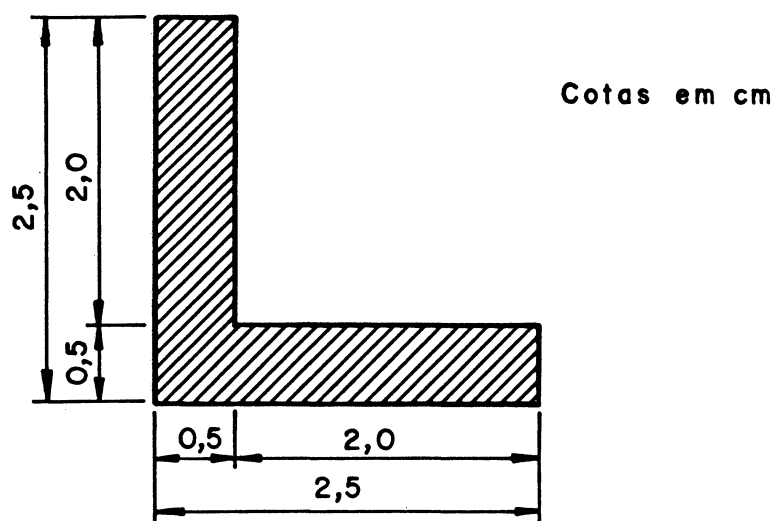


A comparação entre os valores de R_{ca}/R_{cc} calculados e os medidos é vista na fig. 5.7. A linha contínua refere-se aos valores calculados usando-se as expressões da Seção 2.4. Observa-se que há uma concordância entre os valores teóricos e experimentais.

FIGURA 5.7 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS DE R_{ca}/R_{cc} PARA SECÇÃO QUADRADA VAZADA

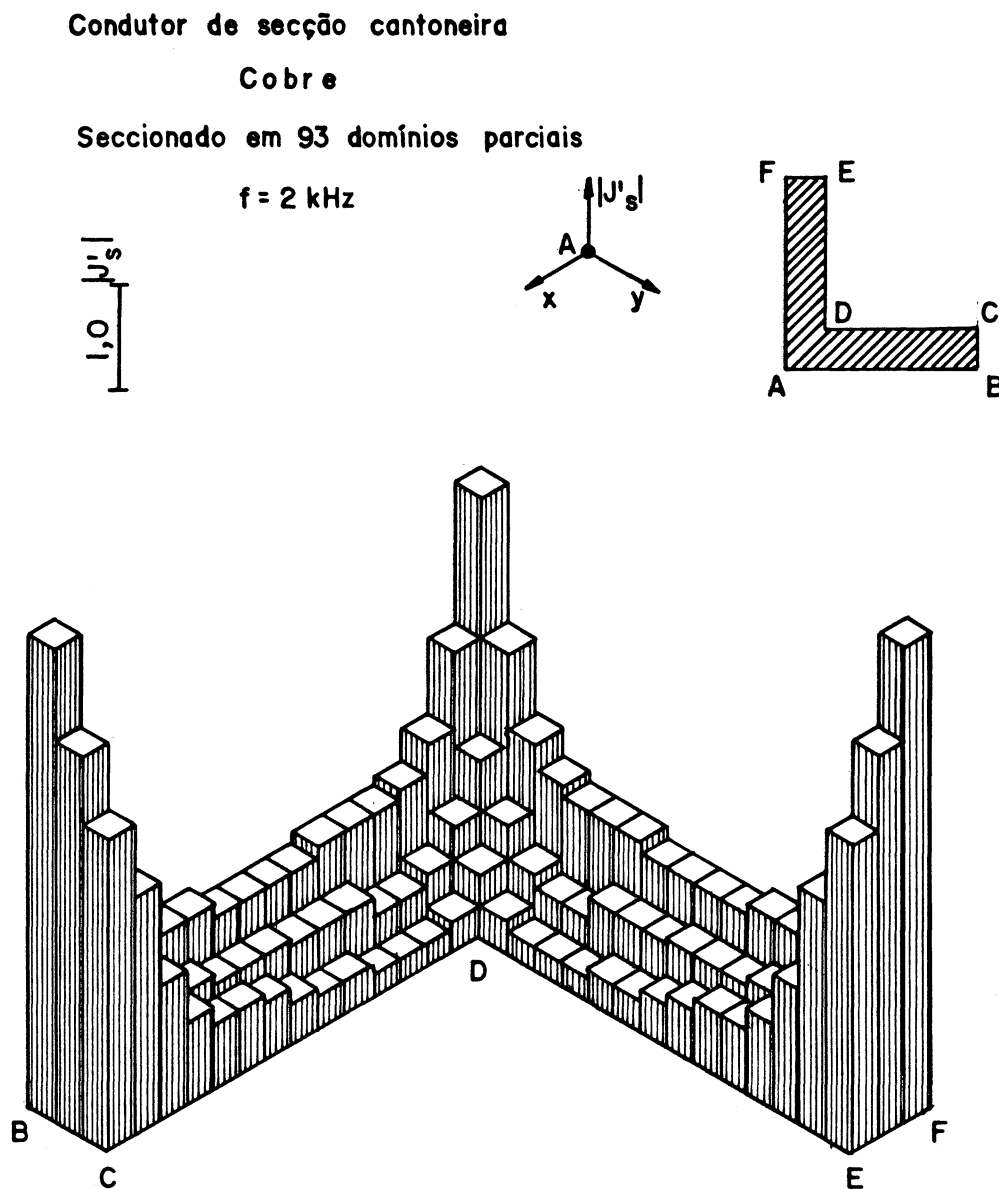
Como ilustração de aplicação em condutores de secção transversal arbitrária, estudamos o caso de um condutor de cobre, de secção em forma de cantoneira, cujas dimensões estão mostradas na fig. 5.8, na frequência de 2 kHz.

FIGURA 5.8 - SECÇÃO TRANSVERSAL DE CANTONEIRA



Na fig. 5.9 vê-se a representação pictorial das densidades de corrente no condutor considerado.

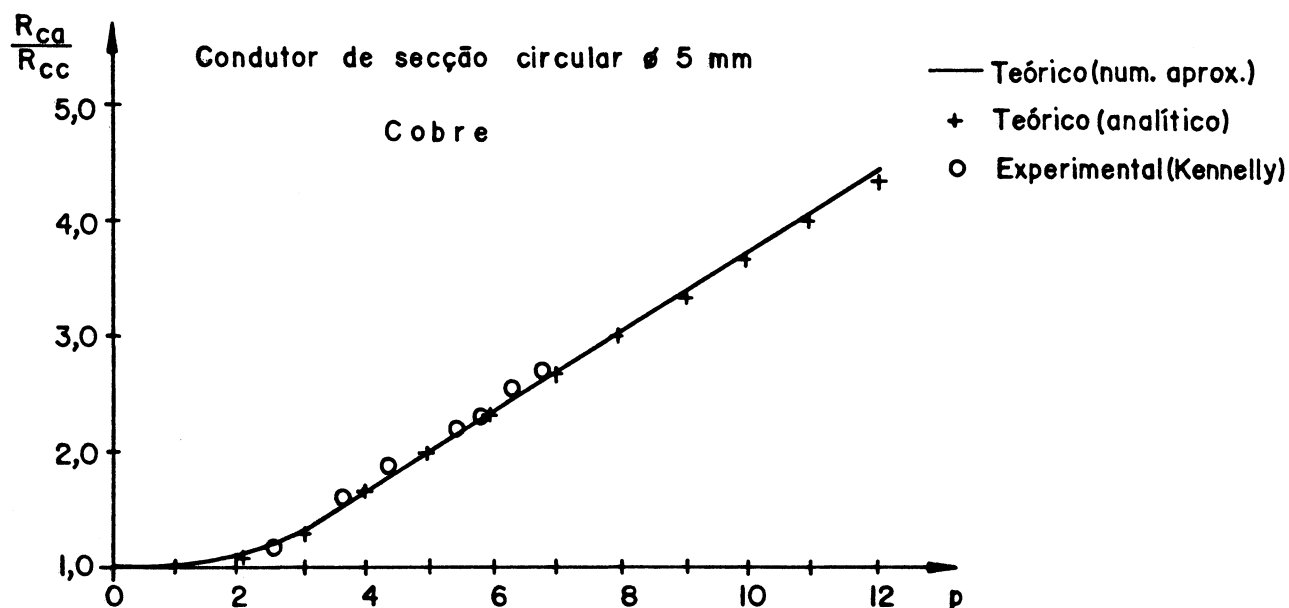
FIGURA 5.9 - REPRESENTAÇÃO PICTORIAL PARA CANTONEIRA



Uma das poucas formas geométricas que apresenta solução analítica exata é o condutor cilíndrico de secção transversal circular. Com base na expressão analítica de R_{ca}/R_{cc} , dada por Cahen, fizemos a comparação entre os valores obtidos a partir das expressões aproximadas da Seção 2.4 e os valores analíticos.⁶ Consideramos um condutor de cobre, de diâmetro igual a

5 mm e para os campos uma faixa de frequências entre 0 e 12 kHz, subdividido em 121 domínios parciais. Para a mesma situação foram também comparados os resultados experimentais obtidos por Kennelly.¹⁸ Na fig. 5.10 vê-se a comparação dos valores de R_{ca}/R_{cc} .

FIGURA 5.10 - COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS DE R_{ca}/R_{cc}

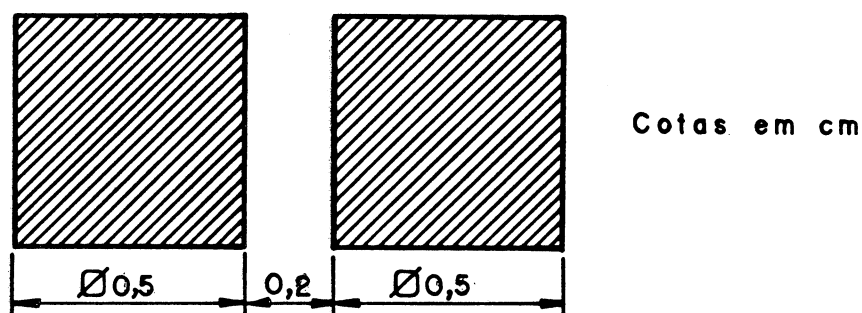


Vê-se que existe uma concordância entre os valores analíticos e aproximados, para este caso também.

Para mostrar o uso das expressões desenvolvidas no Capítulo 3, as quais consideram a ação combinada dos efeitos pelicular e de proximidade, consideramos o caso de dois condutores de cobre, de iguais dimensões, na frequência de 2 kHz.

Considerou-se que os campos elétricos aplicados aos dois condutores possuíam a mesma fase. As dimensões, disposição geométrica relativa e afastamentos estão mostrados na fig. 5.11.

FIGURA 5.11 - SECÇÃO TRANSVERSAL E DISPOSIÇÃO DE DOIS CONDUTORES



Na fig. 5.12 vemos a representação pictorial das densidades de corrente nos condutores. Pela fig. 5.12 vê-se que além do aumento da densidade de corrente na periferia do condutor, devido ao efeito pelicular, existe uma maior concentração de corrente na periferia mais externa aos dois condutores, em função do efeito de proximidade entre os mesmos.

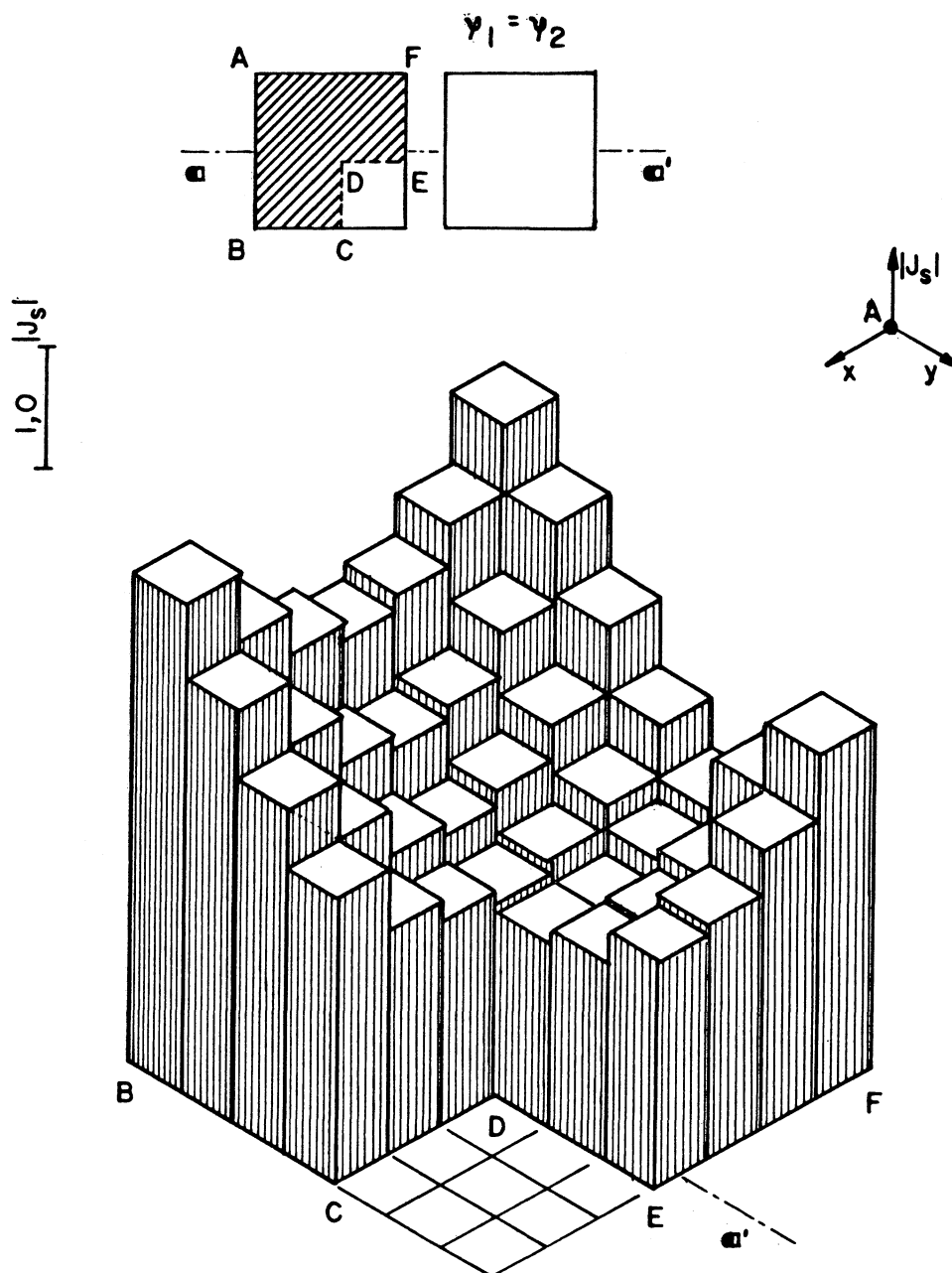
FIGURA 5.12 - REPRESENTAÇÃO PICTORIAL PARA O CASO DE
DOIS CONDUTORES PRÓXIMOS

Condutores de secção 5 mm x 5 mm colocados próximos

Cobre

$f = 2 \text{ kHz}$

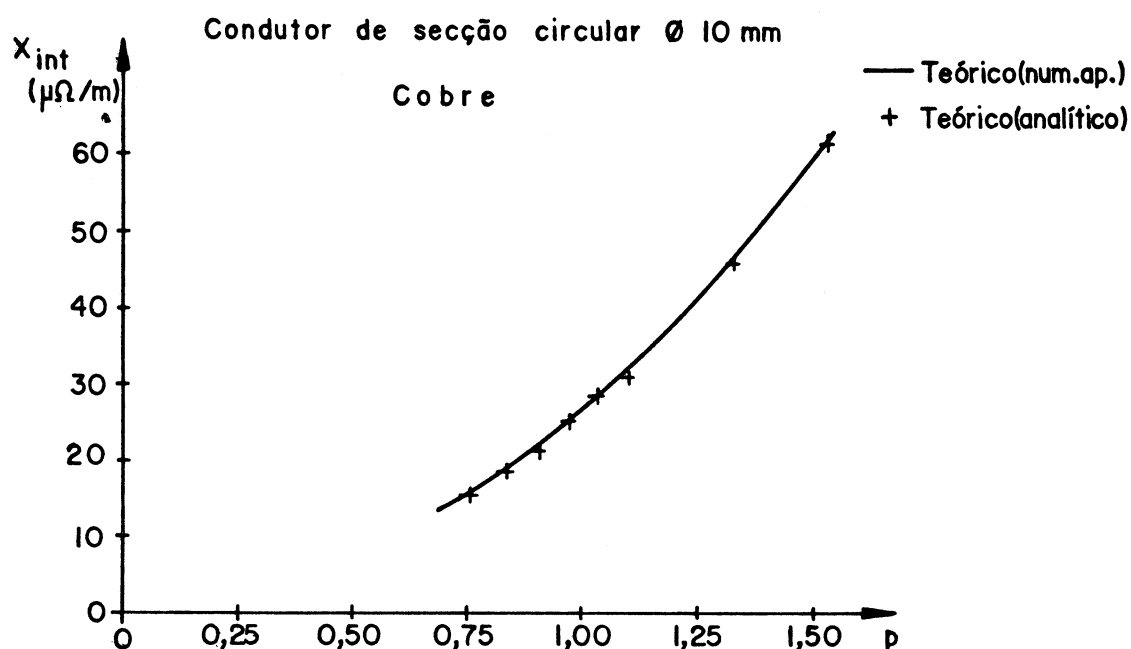
Seccionados em 7×7 domínios parciais



Para verificar as expressões que fornecem a reatância unitária desenvolvidas neste trabalho, fizemos o estudo de um

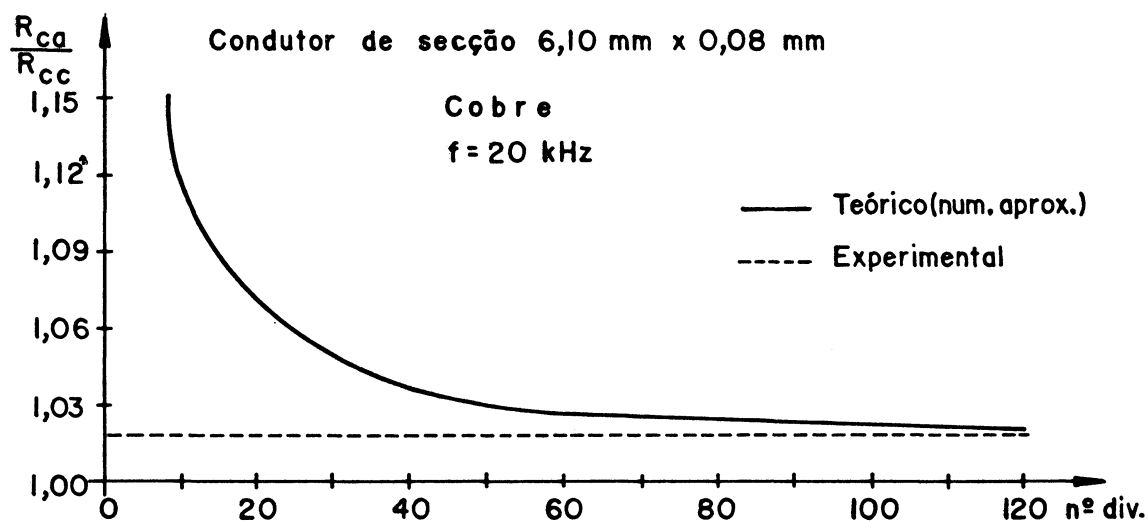
condutor de secção transversal circular, para o qual existe solução analítica exata. Isto foi feito tendo em vista não se ter encontrado referências com resultados experimentais para a reatância. Fez-se, então, a comparação entre os valores da solução analítica e os valores aproximados. Os valores da solução exata para a reatância foram obtidos da expressão dada por Cahen.⁶ Conforme mostrado por Golding, a indutância de um condutor é formada por duas parcelas: uma devido ao campo magnético externo ao condutor, e outra devido ao campo magnético interno ao condutor (p.183).¹² A expressão desenvolvida neste trabalho fornece o valor total da reatância unitária, incluindo as parcelas interna e externa. A expressão analítica dada por Cahen fornece valores da reatância devido à indutância interna. Na fig. 5.13 tem-se a comparação entre os valores da reatância devido à indutância interna obtidos pelos métodos analítico e aproximado. Vê-se que existe uma concordância entre os resultados.

FIGURA 5.13 - COMPARAÇÃO DE VALORES DE X_{int}



Uma consideração a ser feita, com relação a fontes de erro de cálculo, refere-se ao erro de discretização, inerente ao modelo adotado e originado pela subdivisão da secção transversal do condutor em domínios parciais, dentro dos quais a densidade de corrente é suposta constante. Este erro pode ser minimizado pela escolha de um número suficientemente grande de domínios parciais. O número ideal de domínios parciais é obtido pelo cálculo sucessivo da distribuição de corrente, em uma dada situação, para um valor crescente de N . O resultado do cálculo aproximado tende para um valor definido, a partir do qual, mesmo que se aumente N , não há alteração significativa no referido resultado. Ocorre uma convergência para tal valor. Como exemplo, consideramos a aplicação feita à fita de cobre, discutida na fig. 5.1. No cálculo de R_{ca}/R_{cc} , na freqüência de 20 kHz, obteve-se como resultado para R_{ca}/R_{cc} em função do número de domínios parciais N , aquele mostrado na fig. 5.14.

FIGURA 5.14 - CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO APROXIMADA



Cabe então avaliar o compromisso entre tempo de cálculo e precisão desejada.

O número de domínios parciais necessários para a convergência da solução é grandemente dependente da forma geométrica da secção transversal do condutor. Fizemos cálculos para diversos condutores e com diversos N , constatando-se que condutores com secções circulares e quadradas sólidas necessitam de pouca subdivisão, enquanto que condutores com secções compostas, vazadas ou fitas exigem uma grande subdivisão para que ocorra convergência da solução. Outra observação que se fez mostrou que ao aumentar-se a frequência f , o número de domínios parciais N também deve ser aumentado, para que ocorra a convergência da solução.

CONCLUSÕES

Analisando o desenvolvimento teórico e os resultados numéricos, concluimos que:

- a) as comparações feitas entre os resultados aproximados, calculados pelas expressões desenvolvidas neste trabalho, e os valores experimentais, assim como com resultados de expressões analíticas, mostram que há uma concordância entre os mesmos, significando que as expressões aqui desenvolvidas são satisfatórias para os objetivos práticos;
- b) o número de domínios parciais em que o condutor deve ser subdividido, para que ocorra a convergência da solução, depende da frequência dos campos e da forma geométrica da secção transversal;
- c) a principal vantagem da solução por equações integrais é que evita-se resolver o problema de equações diferenciais em todo o espaço;
- d) ficou evidente a influência da condutividade do material sobre a forma da distribuição da corrente no condutor;

- e) as expressões aproximadas para o cálculo da impedância unitária, desenvolvidas neste trabalho, fornecem em sua parte imaginária, a reatância unitária total;
- f) as expressões desenvolvidas para o cálculo da impedância unitária exigem pouco volume de cálculo, sendo conhecidas as densidades de corrente;
- g) o cálculo das DGM utilizando as expressões dos Apêndices B e C possibilita uma diminuição no tempo de cálculo, além de tais expressões serem aplicáveis a outras situações, como por exemplo o cálculo de indutâncias;¹¹
- h) a adoção do método de Shipley para a inversão das matrizes, possibilita uma redução no tempo de cálculo e da área de memória alocada.

O procedimento numérico aqui desenvolvido para solução da equação de Fredholm, pode ser aplicado ao estudo de outros problemas de eletrodinâmica, como por exemplo: solução da equação integral de Robin, cálculo de campos e estudos de espalhamento de ondas eletromagnéticas.^{28,25} Também pode ser aplicado em outras áreas, tais como na eletroquímica, para o estudo de células eletrolíticas.³³

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- 1 Discretizar a equação integral contínua usando domínios parciais retangulares, porém, com áreas diferentes; próximo às faces, onde a densidade de corrente varia mais rapidamente, usar uma maior densidade de domínios parciais e, no centro do condutor, onde a densidade de corrente varia mais lentamente, usar menor densidade de domínios parciais. Verificar se a convergência da solução é acelerada.
- 2 Ajustar uma função densidade de corrente para cada domínio parcial em função das densidades nos domínios adjacentes, de forma a considerar uma distribuição linear ou parabólica, ao invés de constante, dentro do domínio parcial, conforme proposto por Beccari.²
- 3 Usar domínios parciais quadrados e circulares ao invés de retangulares. Avaliar a velocidade de convergência e erros cometidos.
- 4 Adequar a dedução das expressões de forma a poder tratar de corpos condutores estratificados.
- 5 Desenvolver estudo para regimes transitórios.

- 6 Utilizando os resultados do Capítulo 4, desenvolver expressões específicas para sistemas trifásicos, com as impedâncias dadas em componentes simétricas.
- 7 Determinação experimental da distribuição de corrente em metal líquido, por exemplo mercúrio, com inserção de eletrodos de medida. Efetuar também medidas de R_{ca}/R_{cc} .
- 8 Desenvolver, para o caso de dois ou mais condutores, expressões para o cálculo da força mecânica entre os mesmos, a partir das densidades de corrente.

APÊNDICE A: DEFINIÇÃO DE ALGUMAS OPERAÇÕES MATRICIAIS

Para o cálculo da DGM pelo método desenvolvido neste trabalho, usa-se a notação matricial com o objetivo de adequar as expressões ao cálculo computacional. É útil, então, definir certas operações matriciais, bem como suas notações.

Sejam $[A]$, $[B]$ e $[C]$ matrizes $n \times n$ reais; $[D]$ matriz $n \times 1$ real; $[E]$ matriz $1 \times n$ real; ζ um escalar real; q um expoente inteiro; i e j índices inteiros. Definimos as operações:

A.1 PRODUTO USUAL DE MATRIZES

$$[C] = [A][B] \quad (A.1)$$

$$\text{com } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

A.2 PRODUTO INTERNO DE MATRIZES

$$[C] = [A] \cdot [B] \quad (A.2)$$

$$\text{com } c_{ij} = a_{ij} b_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

A.3 PRODUTO ESPECIAL DE MATRIZES

$$[C] = [D] * [E] \quad (A.3)$$

$$\text{com } c_{ij} = d_{\ell_{ij}1} e_{1m_{ij}} \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

Os índices l_{ij} e m_{ij} são dados pelas matrizes de apontadores de índices $[L]$ e $[M]$, definidas como segue:

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Por exemplo, $c_{32} = d_{l_{32}1} e_{1m_{32}} = d_{21} e_{14}$

A.4 ADIÇÃO USUAL DE MATRIZES

$$[C] = [A] + [B] \quad (\text{A.6})$$

$$\text{com } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

A.5 SOMA TOTAL DOS ELEMENTOS DA MATRIZ

$$\zeta = \Sigma [A] \quad (\text{A.7})$$

$$\text{com } \zeta = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}$$

A.6 SOMA TOTAL DOS ELEMENTOS DA MATRIZ COM SINAL

$$\zeta = \Sigma' [A] \quad (\text{A.8})$$

$$\text{com } \zeta = \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}$$

A.7 POTENCIAÇÃO INTERNA DE MATRIZES

$$[C] = [A^q] \quad (A.9)$$

com $c_{ij} = a_{ij}^q \quad i, j = 1, 2, \dots, n$

A.8 LOGARITMO NATURAL DOS ELEMENTOS DA MATRIZ

$$[C] = [\ln A] \quad (A.10)$$

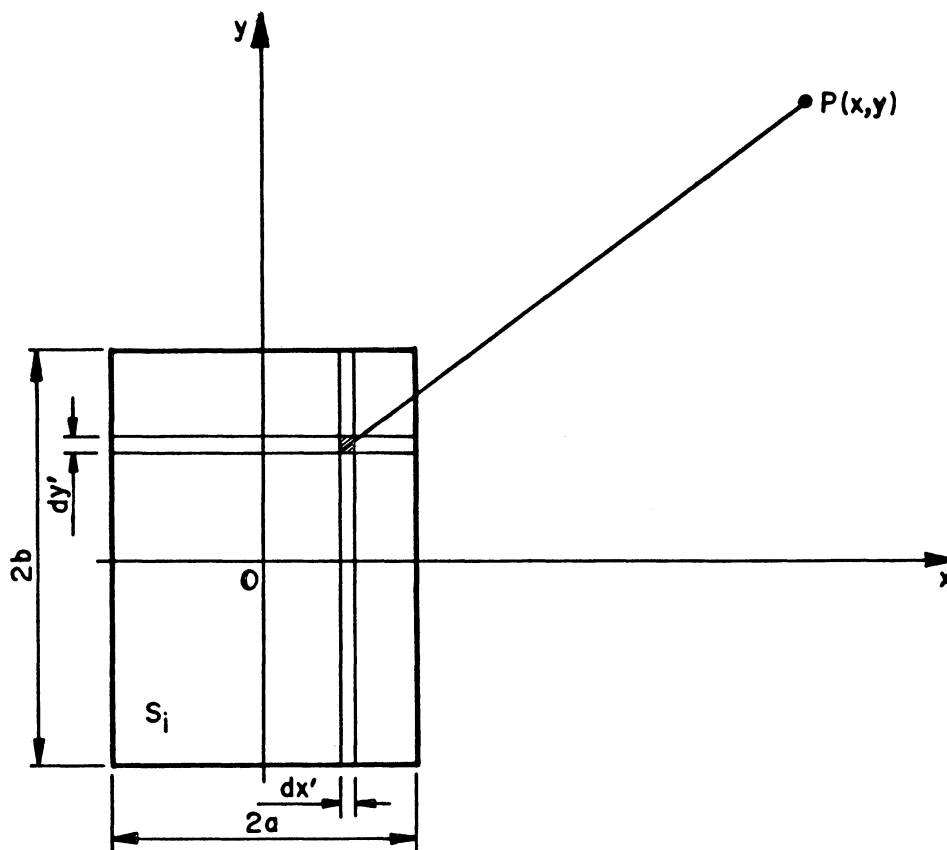
com $c_{ij} = \ln a_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$

APÊNDICE B: EXPRESSÃO PARA O CÁLCULO DA DISTÂNCIA GEOMÉTRICA
MÉDIA ENTRE UMA ÁREA RETANGULAR E UM PONTO

Desenvolvemos uma expressão matricial para o cálculo da DGM entre uma área retangular e um ponto.

Consideramos a geometria da fig. B.1, na qual S_i é uma área retangular genérica, de lados $2a$ e $2b$.

FIGURA B.1 - SITUAÇÃO GEOMÉTRICA DO PROBLEMA



A DGM entre a área S_i e o ponto P , representada por G_{iP} , é calculada a partir de sua definição, introduzida por Maxwell:²⁴

$$\ln G_{iP} = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \ln [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2} dx' dy' \quad , \quad (B.1)$$

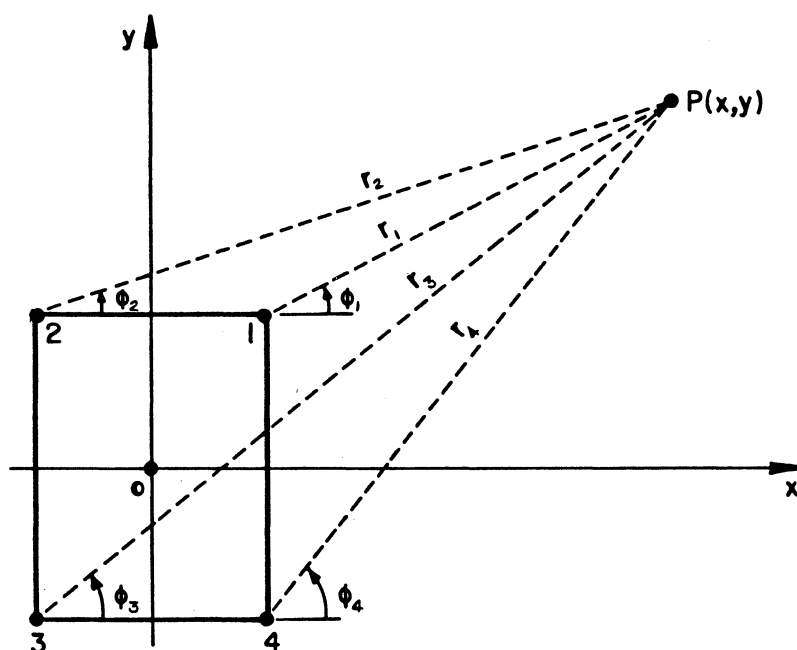
onde (x,y) são as coordenadas do ponto P , (x',y') as variáveis de integração e S_i a área do retângulo.

Efetuamos mudanças de variáveis, obtendo a integral equivalente:

$$\ln G_{iP} = \frac{1}{S_i} \int_{x+a}^{x-a} d\xi \int_{y+b}^{y-b} \ln [\xi^2 + \eta^2]^{1/2} d\eta \quad . \quad (B.2)$$

Adotamos, neste trabalho, o método da integração real para resolver a integral (B.2).

FIGURA B.2 - DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS POLARES



Consideramos a fig. B.2, com as variáveis polares r_j e ϕ_j , sendo $j = 1, 2, 3, 4$, com o objetivo de simplificar o resultado. É necessário que a numeração dos vértices seja mantida como na fig. B.2. Os valores de ϕ_j devem ser expressos em radianos.

Definidas as coordenadas dos vértices e do ponto P, os valores de r_j e ϕ_j são obtidos imediatamente.

Resolvendo-se a integral (B.2), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \ln G_{iP} = \frac{1}{4ab} \{ & (x-a)(y-b) \ln r_1 - (x+a)(y-b) \ln r_2 + \\ & + (x+a)(y+b) \ln r_3 - (x-a)(y+b) \ln r_4 + \\ & + (y-b)^2(\phi_2 - \phi_1) + (y+b)^2(\phi_4 - \phi_3) + \\ & + \frac{r_1^2 \phi_1}{2} - \frac{r_2^2 \phi_2}{2} + \frac{r_3^2 \phi_3}{2} - \frac{r_4^2 \phi_4}{2} - 6ab \} \quad . \quad (B.3) \end{aligned}$$

Definimos as matrizes reais

$$[X] = \begin{bmatrix} x-a \\ x+a \end{bmatrix} \quad , \quad (B.4)$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} (y-b) & (y+b) \end{bmatrix} \quad , \quad (B.5)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} r_1 & r_4 \\ r_2 & r_3 \end{bmatrix} \quad , \quad (B.6)$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_4 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \quad . \quad (B.7)$$

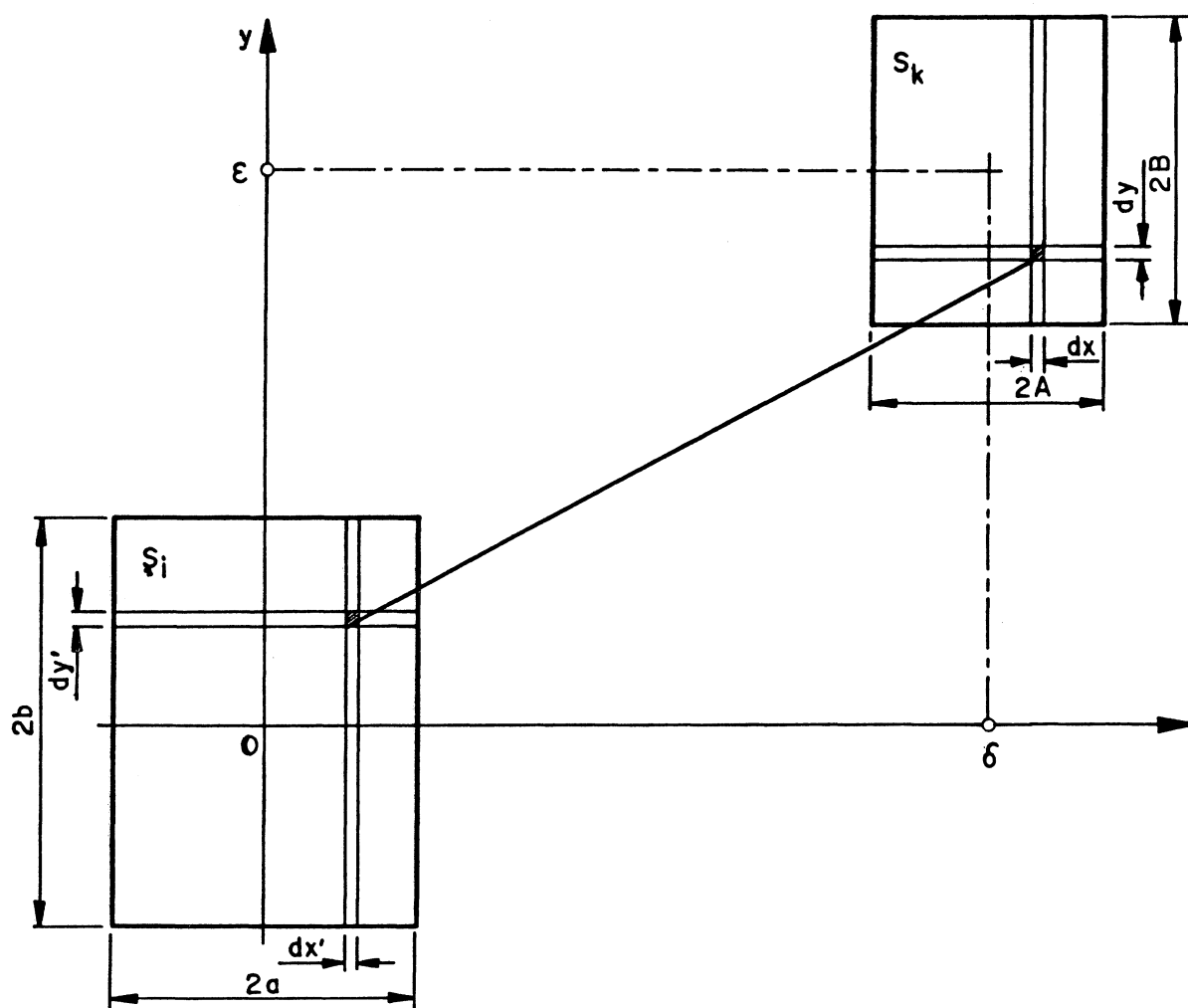
A expressão (B.3) pode ser escrita de forma mais compacta, com o uso das operações matriciais do Apêndice A. Obtemos assim

$$\begin{aligned} \ln G_{IP} = \frac{1}{8ab} \{ & \sum' \{ [X][Y] \cdot [\ln R^2] + [R^2] \cdot [\phi] \} + \\ & + 2(y-b)^2 (\phi_2 - \phi_1) + 2(y+b)^2 (\phi_4 - \phi_3) - \\ & - 12ab \} \end{aligned} \quad . \quad (B.8)$$

APÊNDICE C: EXPRESSÃO PARA O CÁLCULO DA DISTÂNCIA GEOMÉTRICA
MÉDIA ENTRE DUAS ÁREAS RETANGULARES

Desenvolvemos uma expressão matricial para o cálculo da DGM entre duas áreas retangulares.

FIGURA C.1 - SITUAÇÃO GEOMÉTRICA DO PROBLEMA



Consideramos a geometria da fig. C.1, na qual S_i é uma área retangular genérica de lados $\underline{2a}$ e $\underline{2b}$, e S_k é uma área retangular genérica de lados $\underline{2A}$ e $\underline{2B}$. O espaçamento entre os centros dos retângulos vale $\underline{\delta}$ na direção x e $\underline{\epsilon}$ na direção y .

A DGM entre as áreas S_i e S_k , representada por G_{ik} , é calculada a partir de sua definição, introduzida por Maxwell:²⁴

$$\ln G_{ik} = \frac{1}{S_i S_k} \int_{S_k} dx \, dy \int_{S_i} \ln [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2} dx' \, dy' \quad , \quad (C.1)$$

onde (x,y) e (x',y') são as variáveis de integração e S_i e S_k as áreas dos retângulos.

Definimos as grandezas auxiliares

$$\alpha = \delta - A \quad , \quad (C.2)$$

$$\beta = \delta + A \quad , \quad (C.3)$$

$$\gamma = \epsilon - B \quad , \quad (C.4)$$

$$\lambda = \epsilon + B \quad , \quad (C.5)$$

para escrever a integral (C.1) como

$$\ln G_{ik} = \frac{1}{S_i S_k} \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma}^{\lambda} dy \int_{-a}^{+a} dx' \int_{-b}^{+b} \ln [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2} dy' \quad . \quad (C.6)$$

Em (C.6), as duas últimas integrais iteradas identificam-se com a expressão (B.1) do Apêndice B. Então, (C.6) pode ser escrita como

$$\ln G_{ik} = \frac{1}{S_k} \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma}^{\lambda} \ln G_{ip} dy \quad , \quad (C.7)$$

onde G_{ip} tem o significado dado no Apêndice B.

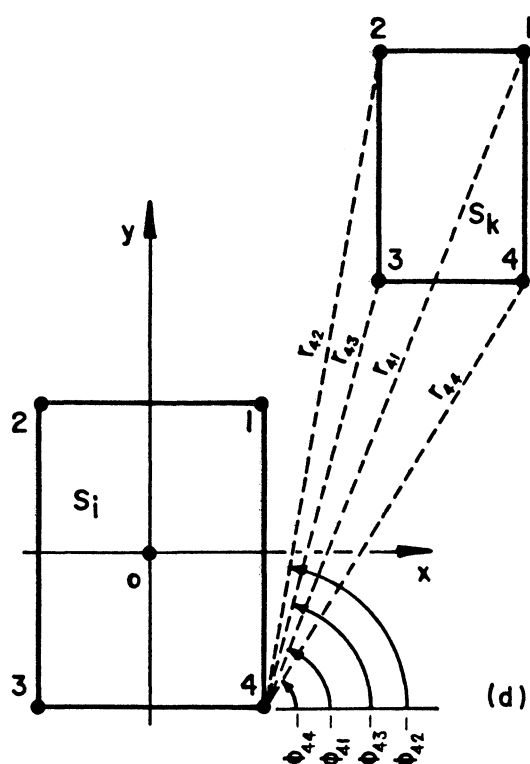
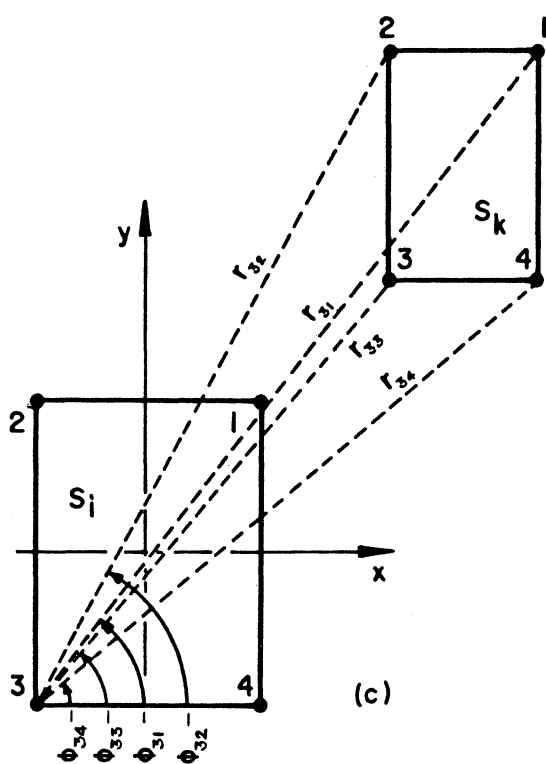
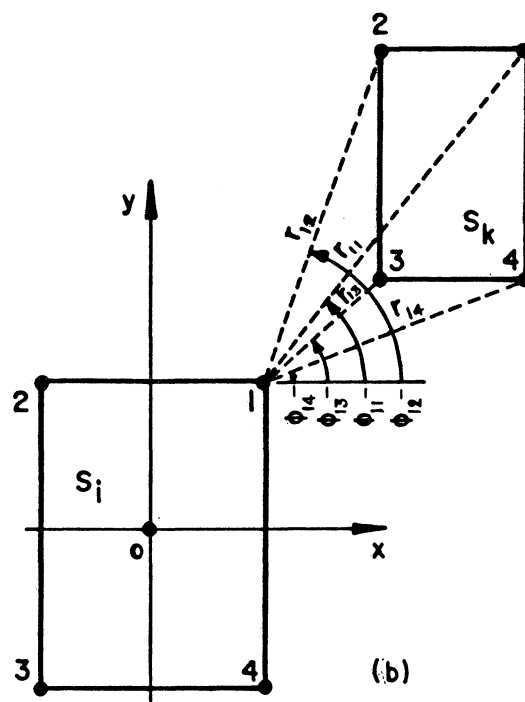
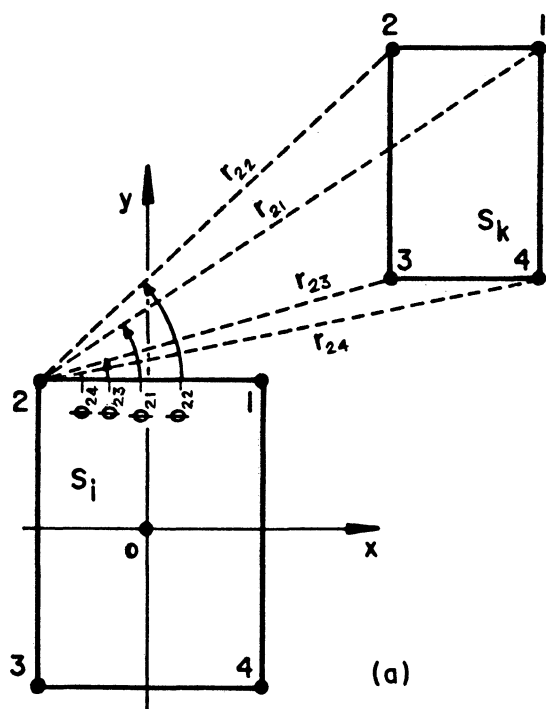
Substituímos o resultado do Apêndice B em (C.7) e calculamos as integrais. O cálculo de (C.7) é feito, neste trabalho, adotando-se o método da integração real.

Para permitir a escrita de uma expressão mais simples para G_{ik} , consideramos a fig. C.2, na qual são definidas as variáveis polares r_{jm} e ϕ_{jm} , onde $j, m = 1, 2, 3, 4$. Os valores de ϕ_{jm} devem ser expressos em radianos. Caso ϕ_{jm} seja maior que π radianos, deve-se usar o seu replemento. É necessário manter a numeração dos vértices conforme a fig. C.2.

A notação de duplo índice em r_{jm} e ϕ_{jm} tem a seguinte convenção: o índice j representa o vértice da área retangular S_i e o índice m representa o vértice da área retangular S_k .

Estando definidas as coordenadas dos vértices de S_i e S_k , os valores de r_{jm} e ϕ_{jm} são obtidos imediatamente.

FIGURA C.2 - DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS POLARES



Resolvendo (C.7), obtemos

$$\begin{aligned}
 \ln G_{ik} = \frac{1}{32ABab} \{ & \\
 & + \left[\frac{1}{3}(\beta-a)^2(\lambda-b)^2 - \frac{1}{24}r_{11}^4 \right] \ln r_{11}^2 - \left[\frac{1}{3}(\beta-a)^2(\lambda+b)^2 - \frac{1}{24}r_{41}^4 \right] \ln r_{41}^2 - \\
 & - \left[\frac{1}{3}(\beta+a)^2(\lambda-b)^2 - \frac{1}{24}r_{21}^4 \right] \ln r_{21}^2 + \left[\frac{1}{3}(\lambda+b)^2(\beta+a)^2 - \frac{1}{24}r_{31}^4 \right] \ln r_{31}^2 - \\
 & - \left[\frac{1}{3}(\lambda-b)^2(\alpha-a)^2 - \frac{1}{24}r_{12}^4 \right] \ln r_{12}^2 + \left[\frac{1}{3}(\lambda+b)^2(\alpha-a)^2 - \frac{1}{24}r_{42}^4 \right] \ln r_{42}^2 + \\
 & + \left[\frac{1}{3}(\lambda-b)^2(\alpha+a)^2 - \frac{1}{24}r_{22}^4 \right] \ln r_{22}^2 - \left[\frac{1}{3}(\lambda+b)^2(\alpha+a)^2 - \frac{1}{24}r_{32}^4 \right] \ln r_{32}^2 - \\
 & - \left[\frac{1}{3}(\gamma-b)^2(\beta-a)^2 - \frac{1}{24}r_{14}^4 \right] \ln r_{14}^2 + \left[\frac{1}{3}(\gamma+b)^2(\beta-a)^2 - \frac{1}{24}r_{44}^4 \right] \ln r_{44}^2 + \\
 & + \left[\frac{1}{3}(\gamma-b)^2(\beta+a)^2 - \frac{1}{24}r_{24}^4 \right] \ln r_{24}^2 - \left[\frac{1}{3}(\gamma+b)^2(\beta+a)^2 - \frac{1}{24}r_{34}^4 \right] \ln r_{34}^2 + \\
 & + \left[\frac{1}{3}(\gamma-b)^2(\alpha-a)^2 - \frac{1}{24}r_{13}^4 \right] \ln r_{13}^2 - \left[\frac{1}{3}(\gamma+b)^2(\alpha-a)^2 - \frac{1}{24}r_{43}^4 \right] \ln r_{43}^2 - \\
 & - \left[\frac{1}{3}(\gamma-b)^2(\alpha+a)^2 - \frac{1}{24}r_{23}^4 \right] \ln r_{23}^2 + \left[\frac{1}{3}(\gamma+b)^2(\alpha+a)^2 - \frac{1}{24}r_{33}^4 \right] \ln r_{33}^2 - \\
 & - \frac{1}{3}(\lambda-b)^3 \left[(\beta-a)\phi_{11} - (\beta+a)\phi_{21} - (\alpha-a)\phi_{12} + (\alpha+a)\phi_{22} \right] + \\
 & + \frac{1}{3}(\lambda+b)^3 \left[(\beta-a)\phi_{41} - (\beta+a)\phi_{31} - (\alpha-a)\phi_{42} + (\alpha+a)\phi_{32} \right] + \\
 & + \frac{1}{3}(\gamma-b)^3 \left[(\beta-a)\phi_{14} - (\beta+a)\phi_{24} - (\alpha-a)\phi_{13} + (\alpha+a)\phi_{23} \right] - \\
 & - \frac{1}{3}(\gamma+b)^3 \left[(\beta-a)\phi_{44} - (\beta+a)\phi_{34} - (\alpha-a)\phi_{43} + (\alpha+a)\phi_{33} \right] + \\
 & + \frac{1}{3}(\beta-a)^3 \left[(\lambda-b)\phi_{11} - (\lambda+b)\phi_{41} - (\gamma-b)\phi_{14} + (\gamma+b)\phi_{44} \right] - \\
 & - \frac{1}{3}(\beta+a)^3 \left[(\lambda-b)\phi_{21} - (\lambda+b)\phi_{31} - (\gamma-b)\phi_{24} + (\gamma+b)\phi_{34} \right] - \\
 & - \frac{1}{3}(\alpha-a)^3 \left[(\lambda-b)\phi_{12} - (\lambda+b)\phi_{42} - (\gamma-b)\phi_{13} + (\gamma+b)\phi_{43} \right] + \\
 & + \frac{1}{3}(\alpha+a)^3 \left[(\lambda-b)\phi_{22} - (\lambda+b)\phi_{32} - (\gamma-b)\phi_{23} + (\gamma+b)\phi_{33} \right] \\
 & - \frac{200}{3} ABab \} .
 \end{aligned}
 \tag{C.8}$$

Definimos as matrizes reais

$$[X] = \begin{bmatrix} (\beta-a) & (\beta+a) & (\alpha-a) & (\alpha+a) \end{bmatrix} , \quad (C.9)$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} \lambda-b \\ \lambda+b \\ \gamma-b \\ \gamma+b \end{bmatrix} , \quad (C.10)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} , \quad (C.11)$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44} \end{bmatrix} . \quad (C.12)$$

A expressão (C.8) pode ser escrita de forma mais compacta com o uso das operações matriciais do Apêndice A. Obtivemos com isto

$$\begin{aligned} \ln G_{ik} = \frac{1}{32ABab} \{ & \left[\frac{1}{3} [Y^2] * [X^2] - \frac{1}{24} [R^4] \right] \cdot [\ln R^2] + \\ & + \frac{1}{3} \left[[Y] * [X^3] - [Y^3] * [X] \right] \cdot [\Phi] \} - \\ & - \frac{200}{3} ABab \} . \end{aligned} \quad (C.13)$$

Quando os dois retângulos são idênticos e estão sobrepostos, i é igual a k , e diz-se que G_{ii} é a DGM própria do retângulo. Seu valor é calculado por

$$\begin{aligned} \ln G_{ii} = & \ln (a^2 + b^2)^{1/2} - \frac{a^2}{6b^2} \ln \left\{ \frac{(a^2 + b^2)^{1/2}}{a} \right\} - \\ & - \frac{b^2}{6a^2} \ln \left\{ \frac{(a^2 + b^2)^{1/2}}{b} \right\} + \frac{2a}{3b} \arctan (b/a) + \\ & + \frac{2b}{3a} \arctan (a/b) - \frac{25}{12} + \ln 2 \end{aligned} \quad . \quad (C.14)$$

Outra forma de resolver (C.1) é o método da integração complexa, proposto por Schaffer.³¹ Tal método é mais simples na fase analítica; faz-se uma transformação das integrais (C.6) para o plano complexo e o trabalho analítico de solução das integrais fica bastante reduzido.

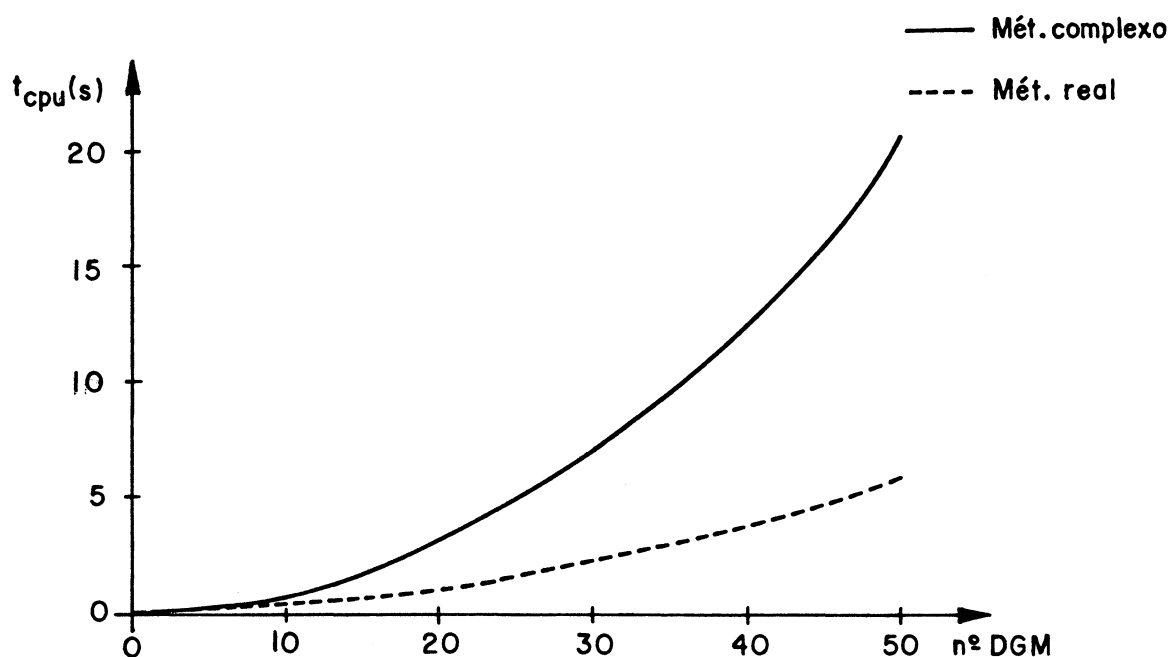
O método da integração real, com estabelecimento do resultado em forma matricial, desenvolvido neste trabalho, mostrou-se mais adequado ao cálculo numérico.

Dentre as vantagens das expressões matriciais (B.8) e (C.13) citamos:

- a) a forma matricial das expressões facilita o desenvolvimento de algoritmos computacionais;
- b) o uso apenas de variáveis reais possibilita que as rotinas sejam implementadas diretamente em linguagens que não permitem a declaração de variáveis complexas;
- c) para a linguagem FORTRAN-10 existente no DEC System, usada neste trabalho, a qual permite declarar variáveis complexas, o tempo de cálculo usando a expressão (C.13) é menor do que o tempo de cálculo usando a expressão complexa.

Na fig. C.3 vê-se a comparação dos tempos de cálculo usando as expressões originadas pelos dois métodos, em função do número de DGM calculadas. A curva em linha tracejada refere-se ao uso de (C.13) enquanto que a curva em linha cheia refere-se ao uso da expressão do método de integração complexa.

FIGURA C.3 - COMPARAÇÃO DE TEMPOS DE CÁLCULO

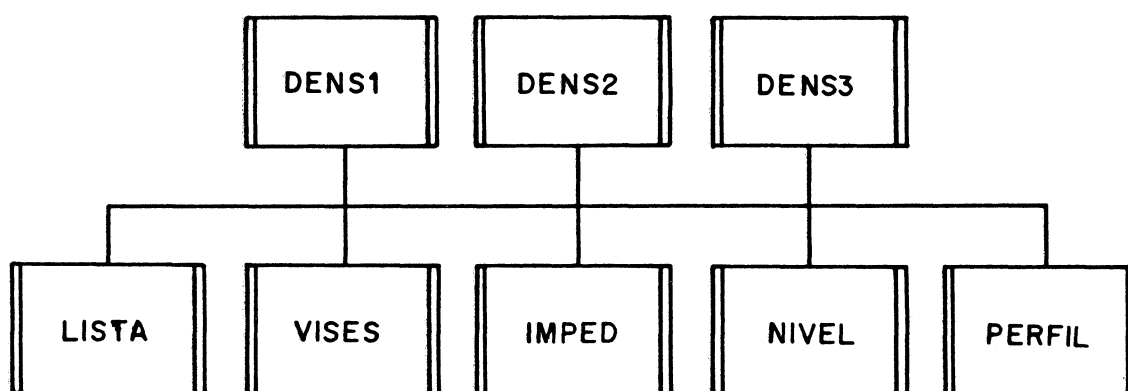


APÊNDICE D: BREVE DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS UTILIZADOS

Para o estudo dos efeitos pelicular e de proximidade foi desenvolvido um conjunto de programas computacionais. Cada programa executa uma função específica, sendo que a execução dos mesmos pode ser encadeada para produzir os resultados desejados.

De forma esquemática, a hierarquia de execução dos programas é a seguinte:

FIGURA D.1 - HIERARQUIA DE UTILIZAÇÃO DOS PROGRAMAS



A sigla dentro de cada retângulo representa o nome de cada programa.

Os programas do primeiro nível hierárquico são executados conforme a situação em estudo. Assim, tem-se:

DENS1: para casos de um único condutor retangular.

DENS2: para casos de um único condutor de secção transversal qualquer.

DENS3: para casos de até dois condutores retangulares colocados geometricamente em paralelo.

Estes programas executam as seguintes funções:

- a) aquisição dos dados físicos e geométricos do problema em estudo: número de condutores, dimensões geométricas, frequência do campo elétrico aplicado, condutividade e permeabilidade do material, subdivisão desejada e corrente total no condutor ou condutores;
- b) montagem e solução das equações matriciais;
- c) obtenção das densidades de corrente em cada domínio parcial, nas formas cartesiana e polar.

Os resultados são gravados em dois arquivos para posterior utilização pelos programas de nível hierárquico inferior.

No cálculo das DGM, emprega-se o método matricial real descrito nos Apêndices B e C. Para a inversão das matrizes, usa-se o método de Shipley.⁴

Os programas do segundo nível hierárquico executam suas funções com base nos dois arquivos gerados pelos programas do primeiro nível. Fazem, em sua maioria, a adequação dos resultados contidos nos arquivos, para representação através de listagens ou gráficos.

O objetivo de cada programa é o seguinte:

LISTA: produz uma listagem simples contendo os resultados das densidades de corrente, bem como os dados físicos e geométricos.

WISES: produz uma listagem contendo as densidades de corrente, nas formas cartesiana e polar. Este programa subdivide as páginas do relatório em campos, que estão associados à disposição geométrica dos domínios parciais da secção transversal em estudo. Ao analisar-se a listagem tem-se uma visão da distribuição das densidades de corrente através da secção transversal.

IMPED: calcula a impedância unitária do condutor estudado.

NIVEL: produz, no ploter, o gráfico das curvas de igual densidade de corrente (curvas equidensidades). O plano representado é o da secção transversal do condutor.

PERFIL: produz, no ploter, o gráfico dos perfis de densidades de corrente segundo planos seleccionados. Os planos seleccionados são secções longitudinais do condutor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 ARNOLD, A.H.M. Proximity effect in solid and hollow round conductors. Jour. IEE, 82:537-45, 1938.
- 2 BECCARI, C. & RONCA, C. L'effetto pellicolare in conduttori a nastro. L'Elettrotecnica, 56(10):607-13, 1969.
- 3 BELEVITCH, V.; GUERRET, P.; LIÉNARD, J.C. Le skin-effect dans un ruban. Rev. HF, 5(5):109-15, 1962.
- 4 BROWN, H.E. Grandes sistemas elétricos - métodos matriciais. São Paulo, Editora LTC/EFEI, 1977. s.p.
- 5 BURKE, P.E. & ALDEN, R.T.H. Current density probes. IEEE Trans., PAS-88(2):181-5, Feb.1969.
- 6 CAHEN, F. La repartition des courants dans les conducteurs massifs. Techniques de L'Ingénieur, D-130:1-10, 1951.
- 7 CASIMIR, H.B.G. & UBBINK, J. The skin effect. Philips Technical Review, 28(9):271-83, 1967.
- 8 CHEMICAL RUBBER COMPANY. Handbook of chemistry and physics. 51.st ed. Ohio, 1951.
- 9 DALEY, J.L. Current distribution in a rectangular conductor. Trans. AIEE, 58:687-91, 1939.
- 10 DWIGHT, H.B. Skin effect in tubular and flat conductors. Trans. AIEE, 37(2):1379-403, 1918.

- 11 EDELMANN, H. J.C. Maxwell's geometric mean distances.
Siemens Forsch.-u. Entwickl.-Ber., 10(3):133-8, 1981.
- 12 GOLDING, E.W. & WIDDIS, F.C. Electrical measurements and measuring instruments. 5.th ed. London, Pitman Paperbacks, 1963. Cap. 5.
- 13 GRANEAU, P. Alternating and transient conduction currents in straight conductors of any cross-section. Int. J. Electronics, 19:41-59, 1965.
- 14 GROSS, H.G. Die Berechnung der Stromverteilung in zylindrischen Leitern mit rechteckigem und elliptischem Querschnitt. Arch. Elektrotech., 34:241-68, 1940.
- 15 GUILLOT, M. La production de champs magnétiques intenses transitoires: les effets secondaires deviennent prépondérants. Revue Générale de L'Électricité, 9:37-48, oct.1987.
- 16 HIGGINS, T.J. The origins and developments of the concepts of inductance, skin effect and proximity effect.
American Journal of Physics, 9(6):337-46, Dec.1941.
- 17 ISELBORN, K.W. & WEIß, P. A numerical method for computation of current density distribution in conductors of circular cross-section. Fourth International Symposium on High Voltage Engineering, 13(4):1-4, 1983.
- 18 KENNELLY, A.E. & AFFEL, H.A. Skin effect resistance measurements of conductors. Proc. IRE, 4:523-55, Dec.1916.
- 19 LONDON, F. & LONDON, H. Proc. Roy. Soc. A, 149:71, 1935.
- 20 MALEWSKI, R. Measurements of transient skin effect within nonlinear conductors. IEEE Trans., PAS-91(5):1881-6, Sept./Oct.1972.

- 21 MANNEBACK, C. An integral equation for skin effect in parallel conductors. Jour. Math. Phys., 1:123-46, 1922.
- 22 MATHEWS, J. & WALKER, R.L. Mathematical methods of physics. 2.nd ed. California, Addison Wesley, 1973. 501 p.
- 23 MATVEEV, A.N. Electricity and magnetism. Moscow, Mir Publishers, 1986.
- 24 MAXWELL, J.C. A treatise on electricity and magnetism. N.Y., Dover Publication Inc., 1954. 2 v., s.p.
- 25 MEI, K. & BLADEL, J. Low-frequency scattering by rectangular cylinders. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 3:52-6, Jan.1963.
- 26 PARIS, D.T. & HURD, F.K. Teoria eletromagnética básica. Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois, 1983. 514 p.
- 27 PIPPARD, A.B. Proc. Roy. Soc. A, 216:547, 1953.
- 28 POINCELOT, P. Précis d'Électromagnétisme théorique. Paris, Ed. Dunod, 1963. 456 p.
- 29 PRESS, A. Resistance and reactance of massed rectangular conductors. Physical Review, 8(4):417-22, 1916.
- 30 ROSA, E.B. & GROVER, F.W. Formulas and tables for the calculation of mutual and self-inductance. National Bureau of Standard, 8(1):1-223, 1912.
- 31 SCHAFFER, G. & BANDERET, P. L'effet Kelvin dans les barres pour grande intensité de courant. Revue Brown Boveri, 52(8):623-8, 1969.
- 32 SCHWENKHAGEN, H. Untersuchungen über Stromverdrängung in rechteckigen Querschnitten. Arch. Elektrotech., 17:537-89, 1926-1927.

- 33 SHIH, H. & PICKERING, H.W. Three-dimensional modeling of the potential and current distributions in an electrolytic cell. Journ. Electrochem. Soc., 134(3): 551-8, Mar.1987.
- 34 SILVESTER, P. AC resistance and reactance of isolated rectangular conductors. IEEE Trans., PAS-86(6):770-4, June 1967.
- 35 _____. Modal network theory of skin effect in flat conductors. Proc. IEEE, 54(9):1147-51, Sept.1966.
- 36 _____. The accurate calculation of skin effect in conductors of complicated shape. IEEE Trans., PAS-87(3):735-42, Mar.1968.
- 37 _____. Skin effect in multiple and polyphase conductors. IEEE Trans., PAS-88(3):231-8, Mar.1969.
- 38 _____. Campos eletromagnéticos modernos. São Paulo, Editora Polígono, 1971. s.p.
- 39 WIAK, S. & ZAKRZEWSKI, K. Numerical calculation of transients in electrical circuits containing elements with nonlinear eddy-current skin effect. IEE Proc., 134(9A):741-6, Nov.1987.
- 40 ZERVAS, M.N. & KRIEZIS, E.E. Integral formulation for the calculation of the field and the forces in a system of conducting cylindrical shells: a general approach. IEE Proc., 134(58):269-75, Sept.1987.